周易宇宙代数学

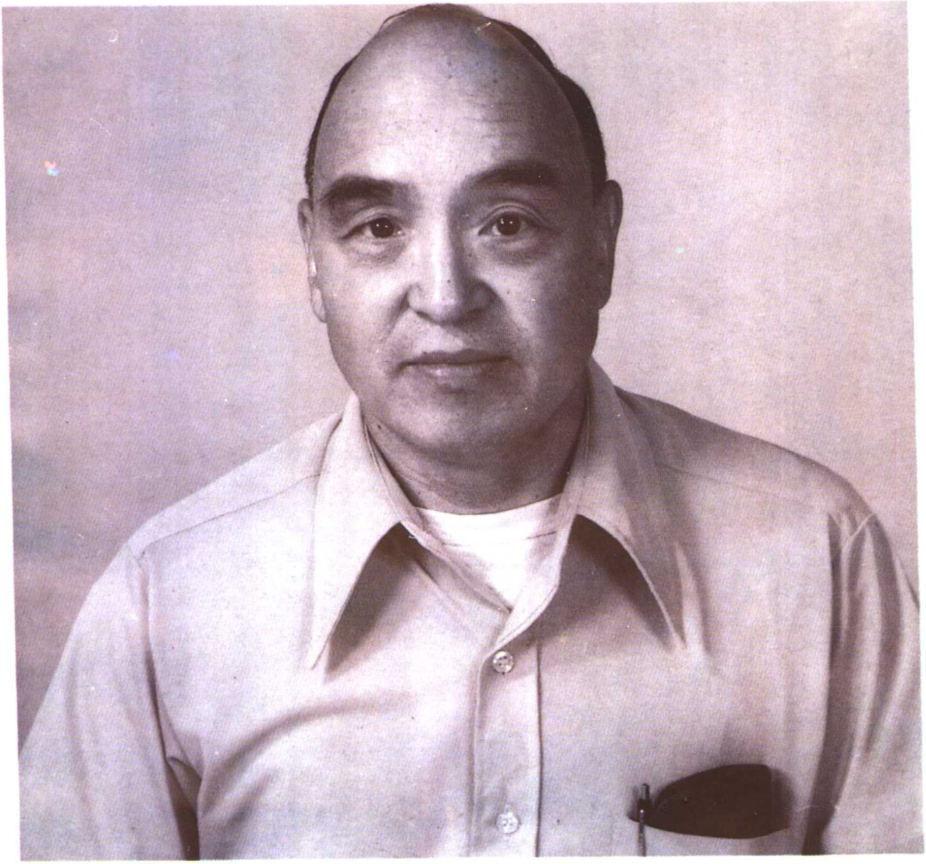
——河洛易数学体系

焦蔚芳 著

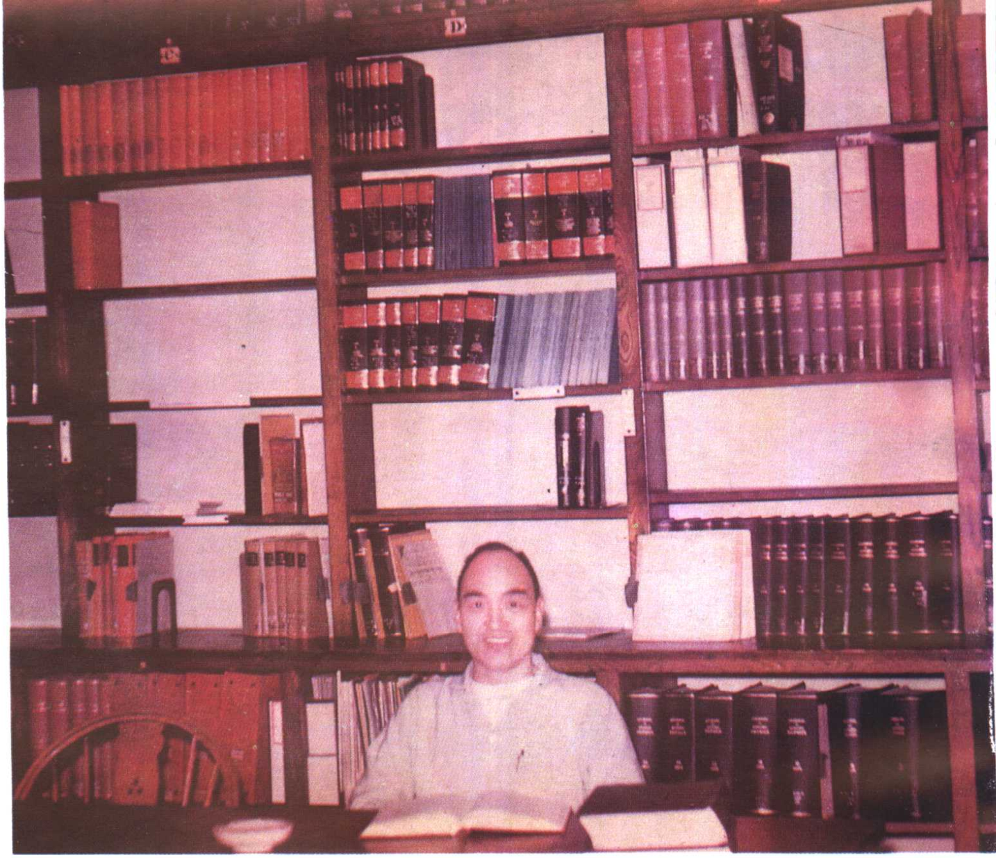
上海科学技术文献出版社

内 容 简 介

本书阐明“河图”、“洛书”、“易卦”是中国传统文化的三大基石，创始用现代数学观点研究并阐释该三大符号体系的数学本质，从而建立了“河、洛、易”数学体系与周易宇宙代数学，以促进中国传统文化与西方现代文化的融合。



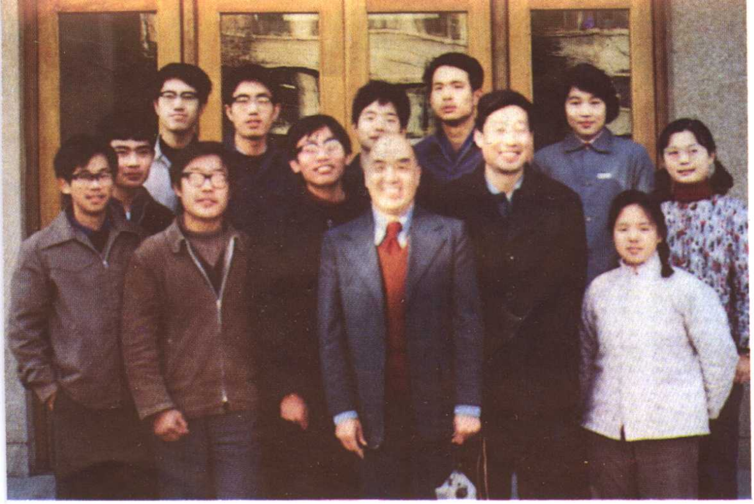
焦蔚芳博士



一九五九年於耶魯大學讀博士學位

一九七九年十月焦蔚芳博士在杭州鋼鐵廠作科技交流

一九八三年十一月在安陽鋼鐵廠作科技講學



一九八三年在北京鋼鐵學院講學
并建立復合材料科目

一九八三年十一月初返河南汲縣故里小學訪問

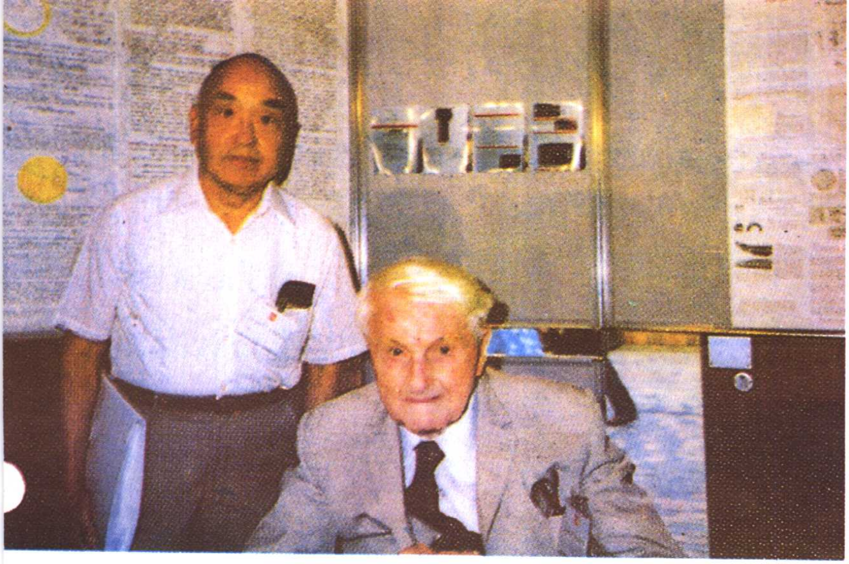
一九八三年十一月焦蔚芳夫婦訪問故里河南省汲縣

一九八八年五月焦蔚芳博士在四川内江教育學院作洛書幾何學講學

焦蔚芳博士夫婦離別四十一年從美國重返威鋼留影

一九八八年十月四川内江各界舉行洛書幾何學及數學教育學交流會議，由内江師範學院黃崇智教授贈送紀念品

一九九〇年十月河南安陽周易與自然科學國際研討會開幕式



焦蔚芳博士與李約瑟博士在英國劍橋

一九九〇年八月在英國劍橋李約瑟研究所

一九九〇年十月參觀河南安陽殷墟博物苑

一九九三年焦博士出席安陽國際周易與科學學術研討會

自左至右：焦夫人　焦蔚芳　成中英(國際)唐明邦(會長)

一九九四年十月在河南安陽接受
周易學會所頒美里杯周易優秀論文獎

一九九四年十月作者與朱明基博士合影

焦蔚芳博士全家攝於一九九二年聖誕節(新年)

语 录 三 则

（一）"河出图，洛出书，圣人则之（而立易）"。

（二）"道可道，非常道；名可名，非常名；（数可数，非常数）"。

（三）"为天地立心，为生民立命，为往圣继绝学，为万世开太平"。

诗 三 首

（一）要作智慧人，先识河洛易；
阴阳实虚变，生命展真谛。

（二）五序纵横显河图，三维矩阵谱洛书；
两仪阴阳展易卦，太极万象化时空。

（三）阴阳虚实太极中，宇宙易化变无穷；
天演地适人竞道，三才谐振肇生生。

代序 1. 陈立夫先生致焦博士函

蔚芳教授著席：接誦三月十五日華函及大著「河洛易數學」「易卦的數學研究」等論文集一冊，從現代數理、科學解析易經之數理，並具創見，深表敬佩。河圖為六千五百年前伏羲時代首先在黃河中游所發現，最近一次大冰河期前（約三萬年前）之玉質空心球體，而刻有經緯度及天文星象之天文觀測器。書經堯典稱「璇璣」，同書顧命稱「天球河圖」。洛書是伏羲時代在黃河中上游洛水從洛南流入黃河處所發現，最近一次大冰河期前，龜甲上刻有十組天文星數之計算器模型。黃帝臣隸首因而發展「九宮算」，大禹因以畫九州（亦作九疇）。孔子易繫辭傳稱「河出圖，洛出書，聖人則之」，孔子世家稱「河出龍圖，洛出

第一頁

龜書」，聖人則之畫卦」等，蓋指伏羲時代尚只是發現河圖洛書而非發明也」。用於觀測天體之天球河圖，據書經注疏稱，直徑長八尺，原刻有萬多顆星，後世為便於記載而簡化成十組，凡五十五星，而稱「天地之數五十有五」，亦用於演算數學，尤其是幾何學甚見奇妙！洛書亦稱龜書、九宮、迷宮等，其星數之排列組合與變化，誠如孔子易繫所謂「極其數」及「盡變化之能事」，神妙無方！至於今稱「零與壹的二元數學」之易卦，今人用之發展電腦及與外星人連繫。上舉圖、書、卦、畫四者，堪稱歷久彌新之學，乃我中華文化之瓌寶也。來函承索小序，因不知書之總稱，請即以此函代序如何？區區之見，仍請

指正。耑此，敬頌

鐸安。

陳立夫 陳立夫印 啟

八十三年四月十三日

（公元一九九四年）

代序 2. 焦蔚芳先生著作阅后感

1986 年仲春，笔者得有机会参加由上海数学会举办的，由美籍华裔学者焦蔚芳博士主讲的学术报告会。当时的题名为：《中华民族原始文化的标志——洛书》。会上，焦博士以简明、雄辩的实据，说明了他 6 年来对洛书的研究成果，指出：《洛书》是中华先民心灵思维的最高成就，也是中国文化的典型模式；并宣布：《洛书》为人类文化史上第一个三维矩阵(Matrix)。焦博士的发言简单明瞭，但其内涵却又无比深刻。诚如国外谚语："最伟大的总是简单的"(The greatest is always simple.)。笔者当时甫从法国巴黎居里大学进修归来，曾惑于中国青年热衷于出国，而国外学者却热衷于对中国文化之追求。焦博士的报告正好为这一疑问提供了有力的论证与解答，为中华民族扬眉吐气，使人有豁然开朗之感。而焦博士以成果报中华之高尚品德，其学识渊博与思维周密，更给我留下深刻的印象，从而启发了本人对《洛书》研究的强烈兴趣。

其后，焦博士的第一篇有关洛书研究的论文——《洛书的数学研究(之一)——焦氏"洛书矩阵"学说》刊于《世界科学》(1987 年第 3 期)。在 1987 年到 1991 年期间，焦博士又完成了《洛书数字几何学导论》与《河洛数论探源》等两项研究工作，得出由洛书基矢组成的洛书空间，以及河图与洛书的集合论等一系列结果，并完成了《洛书的数学研究之二——焦氏"河洛数字几何学"导论》以及《洛书的数学研究之三——焦氏"河洛数论"探源》等两篇力作。该论文先后在英国剑桥由李约瑟(Joseph Needham)博士主持的东方科技史学术研讨会上发表。

由于上述两篇论文焦博士均用英语撰写，为使论文尽快与广大中国读者见面，承焦博士同意并委托，由本人执笔担任部分摘

译及校阅工作，在摘译过程中，由于经常向焦博士请教并交换认识，因此得有机会优先地、更深入地理解焦博士的思想体系，得益不浅。在工作过程中深感论文内容之博大精深，但表达方式又深入浅出。一般具有大专一、二年级的高等数学甚至高中数学基础的读者便能明瞭。该两篇论文译毕经焦博士整理定稿后，先后刊于《世界科学》(1991 年第 3 期与 1992 年第 8、9 期)。

1990 年 10 月，焦博士在参加中国河南安阳市召开的国际周易与自然科学讨论会之后，作为对完成《河图》与《洛书》数学内涵研究后的必然继续，焦先生又将其对中国传统文化的研究工作推上了另一个高峰——建立周易宇宙代数学。在该项研究中，焦博士开创了对八卦阴阳符号的第三层次的解析，发现了易卦阴阳符号系统与现代数学中的复数数域的对应关系，因之建立了四条重要结论。进一步，焦博士推演了周易体系与数学体系、宇宙体系互相关联的二重性(Duality)理论，从而为周易宇宙代数学奠定基础，并将易学研究引入了新的领域。在 1990 年至 1993 年期间，焦博士又完成《易卦的数学研究之一——焦氏“周易宇宙代数学”原理》与《易卦的数学研究之二——焦氏“周易宇宙代数学”建元》两文，并先后刊于《世界科学》(1993 年第 5、7、11 和 12 期)，受到国内外易学界的高度重视，影响深远。前文又被评为美里杯现代优秀论文，刊于《现代易学优秀论文集》(1994 年 10 月出版)。

1994 年，焦博士又将其研究成果与思维体系总结成《河图⇒洛书⇒易卦⇒太极图——焦氏“河洛易数学体系”》一文。至此而完成对中国古代劳动人民的智慧结晶：河洛易与太极图的符号体系(即模型 Model)的数字转换与数学解析，并形成一套完整的数学体系。焦博士提出的《河洛易》数学体系，自成一体又自然形成，推导演绎过程周密细致又朴实无华，本人在校阅过程中，为之叹服不已。

为将焦博士的思维体系系统地介绍给国内读者，根据焦博士

的意见，汇编成书出版。本书系统地发表焦博士在河洛易数学体系研究方面的全部文章，其中有已发表的，也有部分发表或未发表的，以及过去在《世界科学》上发表时由于篇幅限制而删节的部分。这次将全部按原文刊出，并辅以作者传略，以及有关的评论与采访报道等等，使读者对焦氏思维的形成过程及其背景有一个全面的了解。并以此与读者们共同寻求共鸣与共识，诚如易经中所指出的："同声相鸣，同气(信息)相求"。

纵观焦博士的个人传略及经历，可见焦氏在河洛易方面的重大发现，来得绝非偶然，因焦博士能融合贯通中西文化，博古通今，又跨三大科学领域，即应用科学(冶金工程)、理论科学(晶体物理、生物化学等)与社会科学(哲学)，在这些领域内均有重大建树。能登上此科学高峰者，当前世界科技界也为数不多。而更为难能可贵的是，焦博士从青年时代起，即已立志"科技兴国"，长期从事工程技术领域的实际工作，因而在治学中讲求实效，简朴无华，不作臆断与猜测。而且80年代开始焦博士又以如此之功底基础，投入河洛易的数理研究，苦心钻研，博览群书，十余年如一日，终得有此成就，不啻为中华民族对世界文化的重大贡献之一。

根据本人的粗浅感受，本书的意义与成就，当不仅在于对河洛易研究的本身，而是通过河洛易的数学体系，有可能将人类的科学研究事业带进一个崭新的境界。当今的时代，一方面是所谓"信息爆炸"，一方面又面临科学的"危机"，陷入"尽头论"与"不可知论"的僵局。因而本人认为借助于河洛易的数理研究，有可能在下列方面得到突破：

1. 解释自然(即对客观世界的认识)：由于宇宙体系其本质上的二重性正与数学体系和周易体系的二重性相互对应、关联，因而周易体系将有可能为解释宇宙的结构、宇宙的过去与将来，以及解释物质内部结构提供某种模式。

2. 解释感觉(即对主观世界的认识)：根据当前的研究结果，

人的感觉也是由外界刺激的传递与内部信息贮存这两部分组成，因而也具有虚实二重性，是否也与周易体系的虚实二重性有关联？

3. 哲学理论：如辩证唯物论中的外因与内因学说，矛盾的对立与统一法则等均与易学有密切的联系。

4. 自然科学新理论：如近代物理学的三论：耗散结构理论、协同论、突变论，以及由上述三论组成的混沌理论再加上超平衡理论与全息理论而组成的“新三论”等等，其发展趋势将无不与中国古代的传统文化相关联与“挂钩”。

再者，当前提倡中西文化之“整合”，或通俗地叫做“接轨”，但这个“轨”如何去接，如中国传统文化中所谓的“道”“气”“理”之类，究竟如何与西方的物理、化学、生物等学科相联系，这是过去许多学者未能解决的问题。如今根据焦氏的论证，盖中西文化的“接轨点”非数学莫属。具体地说也就是东方之《河洛易》与西方之代数、几何、数论“接轨”。焦博士的功绩便在于开通这一渠道。现代数学之介入将为河洛易“正名”，使中华传统文化得以进一步弘扬。而河洛易之介入，将为现代科学（包括哲学）带来崭新的观点与灿烂的成果。所谓“中国文化将成为21世纪的世界文化的主流”，根据即在于斯。正如焦博士在他的文章中所指出的：“每个历史学家或科学工作者的中心任务之一就是用最新文化知识去阐释最古老的文化符号（思维结晶），以维系人类文化的连续性与永恒性，以达成人类文化的不断前进。”

最后，谨引用诗两句作为与读者们为开发中国未来文化而共勉：“山穷水尽疑无路，柳暗花明又一村”。

朱明基（上海铁道大学教授，

法国巴黎第六大学博士、客座教授）

1994年10月25日于上海

前　言

《周易》或《易经》是中国文化史中第一部由符号到文字著成的古经，它是中国原始传统文化的源泉。世界学者公认它是人类思维智慧的结晶。80年代以来，在中国及世界范围内掀起一阵研究周易的热潮，迄今仍在继续。形成这股周易热的动力有两：西方学者认为，现代西方科学进一步的发展，有待引入周易哲学中的辩证思维原理和方法；中国学者认为，中国传统文化的继承与发展，有待周易研究的现代化与科学化。随着21世纪的即将来临，中国传统的哲学和精神文明与西方现代的科学和物质文明，两者间的融合贯通就形成一股巨大的原动力，为未来全人类的整体文明催生，这就形成了周易现代化和科学化的研究热潮。

笔者于1986～1993年间参加了周易现代化和科学化的研究工作，采用现代数学的逻辑、理论和方法，研究《河图》、《洛书》和《易卦》三大原始符号体系的数学内涵，先后完成了6篇研究论文，建立了两个新生科目："河洛易数学体系"和"周易宇宙代数学"。这6篇论文的主题是：1. 河图和洛书的数字分析；2. 洛书矩阵学说；3. 洛书数字几何学导论；4. 洛书数论新解；5. 周易宇宙代数学原理；6. 周易宇宙代数学建元。这6篇论文曾先后在国际中国科技史会议及周易与自然科学研讨会上宣读，并正式刊布于上海《世界科学》月刊。兹应读者需要，将此6篇论文及其有关文献资料，汇集成本书出版。

河洛易数学体系及周易宇宙代数学的建立，对周易研究的现代化和科学化工作已产生了显著影响。许多读者询问作者建立这两个新生科目所凭藉的思维基础是什么？要回答这一问题，自需

专文讨论，作者现只能长话短说，将个人的主要初步观点写在下面，作为本书的前言。

(1)**周易文化产生的时间问题**：笔者认为，周易文化的建立应从北京猿人的出现开始，如此就将中国文化由伏羲到现代的六、七千年延伸为数十万年。由北京猿人到伏羲王 朝的建立，中国人已奠定了周易文化的第一座基石：河图符号体系。

(2)**周易文化的基础内涵问题**：笔者定义数学是研究人类思维体系的科学，而周易体系是由河图、洛书和易卦三大人类思维符号体系构成，所以周易文化的基础内涵是数学。根据周易文化的范畴是天地人三才体系中的象、数、理有机联系的统一体，象以数生，理以数明，所以数学是人类所有文化的共同基础。

(3)**周易文化成长过程中的突变问题**：由伏羲到夏禹的一千年间，中国人建立了周易文化的第二座基石：洛书符号体系。河图和洛书都是由自然数所构成的数型图阵，两者间的演化示出数系由二维到三维的量变和由平面到空间的质变，但两者均未超越实质的数学系统范围。到了周文王时代，周易文化的成长达到了它的顶峰，并奠定了它的第三座基石：易卦阴阳符号体系。显然地，由河图到洛书的成长过程，只是实在数字的量和质的变化，而周文王的六爻阴阳易卦体系的建立，却完全扬弃了实数系统，成长为一种抽象的阴阳两爻符号系统，这不是量变或质变，而是一种崭新的突变过程。如何认识这一突变过程，读者必须读完本书的全部章节，作者现只从数学观点，提出个人的两点认识：①它代表从十进位数系到二进位数系的突变；②它代表由实数单位到虚数单位的突变。

(4)**周易文化的阴阳二重性问题**：周易文化体系的基本特质为太极一体的阴阳二重性，西方学者称之谓中国的“阴阳学说”。关于阴阳两爻定义的论述，读者可参阅有关易学的论著。作者现只提出个人的阴阳二重性的数学观点：在易学发展的历史过程

中，世界学者试图将阴阳符号与数字建立关系的研究可分为三个层次：第一层次的创始人是孔子，他用阳代表奇数，用阴代表偶数。第二层次的创始人为德人莱布尼兹，他用 0 代表阴爻，用 1 代表阳爻。第三层次创始人是焦蔚芳，他发现易卦阴阳符号系统与现代数学中复数数域的对应关系，得出了 4 个重要结论：①易卦阴阳符号系统就是现代数学中的复数代数系统；②每一易卦代表一个易数，每一易数就是一个复数；③阴爻相当于实数的单位；④阳爻相当于虚数的单位。根据这 4 个定义，“周易宇宙代数学”的建立就形成了复数代数学的基础构成部分。

(5)**周易文化的现代化与科学化问题**：笔者将周易文化等同于中国文化史中所称的先秦文化，就是由北京猿人的出现到春秋战国时诸子百家学术争鸣时代所建立的文化。秦始皇统一六国，开始了封建文化的建立，只到清朝末年就形成一段长达二千余年的封建专制文化。由于封建文化代替了周易文化，在时间延续上，周易文化就发生了中断现象；在中国传统文化的实质上，就发生了周易文化的失落现象。自鸦片战争后直到今日，中国传统文化的现代化与科学化问题，实质上就是周易文化的现代化和科学化问题。这个问题的答案就是近百年来中国学人所找到的一个共识：将封建专制文化改变为民主法制文化；在哲学精神文明中引入科学物质文明。笔者在本书中以数学为准则，阐明了周易文化中的数学思维符号体系，就相当于西方由 17 到 19 世纪 300 年间所建立的现代数学体系，两者间并无本质上的不同。所以周易文化现代化和科学化的问题就是中西文化的融合和贯通问题。

本书写作的读者对象是以高中毕业生为准则，故内容方面立求深入浅出。又因本书各章均系初创之作，在立论、内容和文辞各方面难免有疏忽，不周或有欠完善之处，尚希读者指正与批评。

最后，作者对本书的能够出版，要首先感谢三位人士：上海

铁道大学教授朱明基博士，他对论文的翻译及刊出的校阅付出了心血；上海《世界科学》的编辑江世亮先生，他对论文的刊出及本书的出版工作，作了大力的支持；作者的妻子徐秀菱女士，她劳碌地照顾家庭，使作者可全心研究著作。当然，对广大读者的支持与作者同好学人的鼓励，作者一并在此表达最崇高的敬意。

焦蔚芳

1995 年元月

目　　录

第1章　《河图》、《洛书》和《易卦》的符号体系
——中国原始传统文化形成的三大思维数学模型

导　论

根据人类文化史的记载，各种原始民族文化的建立都可追溯到该民族所创造的一些思维符号体系或模型。中国原始文化的建立为此提供了一个典型范例，她的原始传统文化就是建筑在《河图》、《洛书》和《易卦》三大符号体系上。

当然，一种民族文化的形成所需因素甚多，其中最基本的因素是人种、历史与文化。更具体地说，就是该民族的起源演进，历史发展和文化思维。关于中国民族的起源，现无信史可稽，但根据人类考古学的发掘，就能建立起一部可靠的史实。中国考古学家裴文中于1929年在河北省房山县的周口店山顶洞中发掘出人猿骨骼、石器工具与用火遗迹，这就是举世闻名的北京猿人的出现，距今当在50万年前。北京猿人的出现及其数十万年间在中国本土的发展与演进，就构成中国原始文化成长的开端。在悠久的历史过程中，中国古代社会结构由部落发展为氏族，由氏族发展为封建；文化演进由龟卜进步到甲骨，由甲骨进步到青铜。根据中国古代史的传统与记载，经第一位君王伏羲到周代的建立者周文王，中国人民创造了三大思维符号体系：①伏羲时代（～3300B. C. ）的《河图》；②夏禹时代（～2100B. C. ）的《洛书》；

③文王时代(～1050B.C.)的《易卦》。

到了春秋战国时代(～500B.C.)，中国原始文化的发展达到鼎盛时期，诸子并起，百家争鸣，孔子倡导的儒家学派为《易卦》和《易经》作了《易传》的论释，于是一部居“六经”之首，开中国文化之源的《易经》就在《周易》的名义下流传于中国，成为中国传统文化的泉源，中国传统文化从秦、汉到明、清无不与《周易》有关。

《周易》是中国传统文化形成的泉源，而《河图》和《洛书》是《易卦》体系形成的泉源，此即《周易·系辞传》所称：“河出图，洛出书，圣人则之。”河洛易文化体系经过千余年的发展，只到宋朝理学家朱熹将此三大符号体系同置于《周易本义》一书之首，表示三者间必有相互演化关系存在，正式奠定了“图”、“书”与“易卦”之学。

一、河图、洛书和易卦符号体系简介

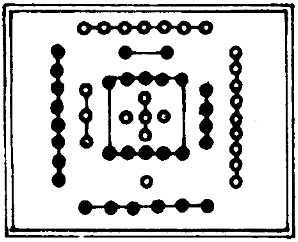
1. 伏羲时代的《河图》符号体系

根据古代史传，伏羲在黄河里发现一匹龙马，背负有黑白圆点所标志的数字图阵，由1到10作环形排列，形状如图1－1的左图所示，史家称之曰《河图》。右图为用现代数字解释的数型图。伏羲受到河图的启示，就创造出用阴阳符号所组成的八卦。

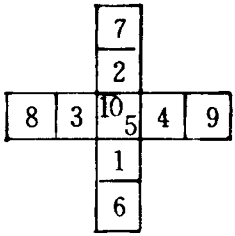
先秦时代确有“河图”之说，如《尚书·顾命篇》载“大玉夷玉天球河图在东序”，孔子在《论语》中说：“凤鸟不至，河不出图”。

显然地，河图是10个基本自然数字由1到10的组合排列数型图。孔子在《周易·系辞》中将由1到10的自然数集描绘谓：“天一地二，天三地四，天五地六，天七地八，天九地十”。天指阳数即奇数，地指阴数即偶数。又西汉末年郑玄在《太玄经》中描

绘河图中的 5 对数偶谓："一与六共宗，二与七为朋，三与八成友，四与九同道，五与五相守。"由秦汉到宋代近千年间，中国数学家称河图的数型为纵横图，称河图中的数偶为纵横数。



河图原型



河图数型

图 1-1

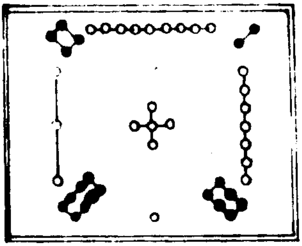
在中国原始文化成长的历史过程中，笔者建议将《河图》作为形成中国民族文化的第一个原始符号体系，它标志着由北京猿人到伏羲时代中华民族的数学思维的精华与结晶，它是中国原始文化初创阶段的第一座基石或里程碑。

2. 夏禹时代的《洛书》符号体系

根据古代史传，夏禹王在洛水中发现一只神龟，背负有黑白圆点所标志的数字图阵，将由 1 到 9 的 9 个数字排列成 9 个胞腔的正方形，如图 1－2 的左图所示，史家称之曰《洛书》，右图为用 现代数字解释的数型图。汉代学者称之曰"九宫"图。大禹受到洛书的启示，就创造出洪范与九畴。

根据《大载礼记 · 明堂篇》所载："明堂者，古有之也；二、九、四；七、五、三；六、一、八"。从汉代开始，中国学者仅称《洛书》九数为"二九四，七五三，六一八"，并据九数所取龟象排列，解释《洛书》九宫谓："九宫者，即二四为肩，六八为足，左三

右七，载九履一，五居中央”。



洛书原型

4	9	2
3	5	7
8	1	6

洛书九宫

图 1-2

根据中国考古的发掘工作，现可证实河图和洛书在西汉文物中的应用。1977 年春，在安徽阜阳县双古堆发掘了西汉汝阴侯墓，在出土文物中，有一面“太乙九宫占盘”，占盘上的图便是《河图洛书》。

由河图到洛书，中间经过约千年的历史演进，它标志着中国先民数学思维能力的飞跃进展。洛书是河图的升华，它将由 1 到 9 的 9 个基本自然数排列成一个正方形数阵，中间一数仍为 5，但却将河图中的 5 个二元纵横数阵升华为洛书中的 8 个三元纵横数阵，构成每行、每列及两对角线上三个数的和都是 15。洛书的这一奇幻特质，就是《易纬·乾凿度》所称：“《易》一阴一阳合而为十五之谓道，阳变七之九，阴变八之六，亦合于十五。”又谓“故太一取其数，以行九宫，四正四维，皆合于十五。”

《洛书》的奇妙结构和演算变化建立了它独特的数学形象和模式，并为中外数学家开创了位置解析、数字几何及组合分析的先河。中国古代数学家发展《洛书》为九宫算及纵横图，西方古代数学家发展《洛书》为幻方。千百年来，以《洛书》三阶幻方为基础，幻方的发展越来越阶数越高，幻方的结构亦越来越幻。现代

数学领域内，仍在研究幻方形成的理论和方法。

在中国原始文化成长的历史过程中，笔者建议将《洛书》作为形成中国原始文化的第二个原始符号体系，它标志着由伏羲到夏禹时代中华民族的数学思维的精华与结晶，它是构成中国原始传统文化的第二座基石或里程碑。

3. 由伏羲到文王时代的《易卦》符号体系：

根据古代史传，伏羲受到《河图》中奇数与偶数的启发，就创造出"阳爻"符号"—"与"阴爻"符号"— —"，用来代表构成宇宙本体的两重性特质，就是说，宇宙间各种事物现象的组成、结构、性质、作用与功能，都可用性质相导的"阴"和"阳"两重实质或两个部分来解析与组合(或对立与统一)。他并用阴阳两爻符号不同层次的排列与组合，建立三爻八卦体系，作为占卜与记事之用。这就是《周易·系辞》所称："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦"。伏羲的八卦阴阳符号体系之生成如图 1-3 所示。

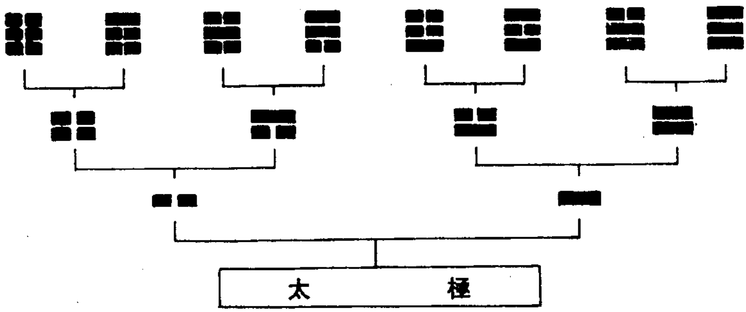


图 1-3 伏羲八卦阴阳符号体系

伏羲的八卦阴阳符号体系经过夏商两代的演进，到了周文王时，他将八卦再形组合为两卦相互重叠的六十四卦，就形成由 6

个阴、阳两爻所构成的各种可能排列与组合，正式建立了“易卦阴阳符号体系”。图 1-4 示出了六爻易卦的方阵排列图。文王又为每卦作了卦辞，周公为每卦中的六爻作了爻辞，居六经之首的《易经》于焉告成。

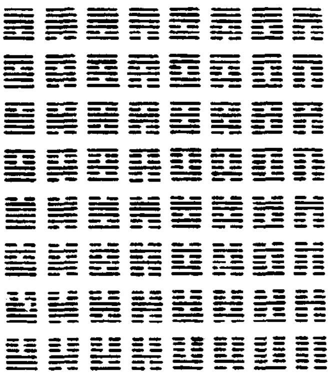


图 1-4 《易卦》方阵

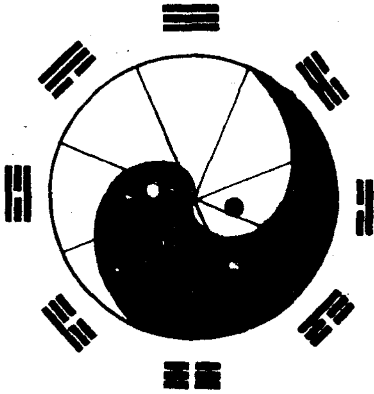


图 1-5 《参同契》太极图

“易”以“太极”为核心，为建元，其主旨是“乾、坤一太极”。太极是道，是本体。易文曰：“一阴一阳之谓道。”但在《周易》一书中，只有太极一词，却无太极图解。春秋战国后，周易文化的继承发展分为两大学派：一为儒家学派，承袭了周易的哲学(即理)部分，创作了《易传》中的十翼诠释；一为道家学派，承袭了周易的科学(即象)部分，奠定了对“太极图”的研究。东汉魏伯阳所著《周易参同契》中载有他所创作的“太极图”，如图 1－5 所示，在民间传称曰“阴阳鱼”。直到朱熹正式奠定了“图”“书”“易卦”之学，“太极图”就成为易卦阴阳符号体系的基础构成。

在中国原始文化成长的历史过程中，笔者建议将《易卦》阴阳符号体系作为形成中国民族文化的第三个原始符号体系，它代

表由伏羲到周文王时代中华民族的数学思维的精华与结晶，它是构成中国原始传统文化的第三座基石或里程碑。

二、河、洛、易符号体系与现代数学挂钩问题

中国先民创造《河图》、《洛书》和《易卦》三大符号体系已有5000年历史，但只到现在，河、洛、易图在世界人民心目中仍蒙有一层神秘色彩，中外数学家仍名河图为“纵横图”，称洛书为“幻方”，仍将易卦阴阳符号体系作为占卜之用，很少有学者应用现代数学观点去研究并阐释这三大符号体系的数学本质。因此，河、洛、易符号体系的数学内涵是什么，它们在现代数学领域内的地位是什么，就成为一个有重大意义而需要解决的数学问题。笔者认为在对中国传统文化的继承、重整与发扬工作中，如何建立“河、洛、易数学体系”实是一件有关中国传统文化现代化的基本研究命题。

自鸦片战争后直到今日，中国现代化问题的主要内涵就是中国传统文化与西方现代文化的相互融合问题．这是一个任重而道远，全体人民都须全力以赴的艰苦路程。焦氏“河洛易数学体系”的研究与建立，只是迈开这千里旅程的第一步。但是，环顾今天的中国文化界，大半大专毕业学者不知河图、洛书为何物，更将易卦阴阳符号体系认作迷信与腐朽，甚少研究价值。当然，在世界科学文化突飞猛进的今日，每个人对问题：“河、洛、易的数学内涵是否值得研究”都可有不同的观点与答案。笔者这里仅从个人最保守的观点归纳出一个回答：“每个历史学家或科学工作者的中心任务就是用最新的文化知识去阐释最古老的文化符号，以维系人类文化的连续性与永恒性，以达成人类文化不停顿的前进。”河洛易符号体系是中国传统文化建立的三大基石，笔者认为河洛易符号体系与现代数学的结合仍是促进中国文化成为21

世纪世界文化主流的必需条件和工作。

三、建立“河洛易数学体系”的研究命题

数学是一切科学和哲学的基础和语言。根据笔者的认识，河图、洛书和易卦三者都可统属为由人类数学思维所结晶出来的原始数学模型，代表中国传统文化生长的数学基础。自汉代以来，中国学者就将此三类图型理解并通称谓：“河、洛、易数。”宋代理学家朱熹更将此三图同置于《周易本义》一书之首，表示三者间必有相互演化关系存在，但2000年来，在易学发展的历史洪流中，迄今尚未能建立“河、洛、易数”的数学体系；亦很少学者根据现代数学理论阐释河洛易三大符号体系的数学内涵。

显然地，《河图》是数，《洛书》亦是数，因为两者都是用点代表数所构成的数型图阵。但因《易卦》只是用阴爻与阳爻两种符号所构成的不同层次的排列与组合，其中既无数字，亦无运算法则，所以历代习“易”者均有“易数”难通之感。然而，笔者必须指出，《易卦》是更符合现代抽象数学的体系结构，因为它是用阴阳二爻按照二进制数序所成的集合，应可演化发展成现代易学家们所梦寐以求的“周易宇宙代数学”。

笔者根据河洛易图均属“数系”的这一大原则，就拟定了下面一些建立“河洛易数学体系”的初步研究命题：

1. 根据现代数论，研究《河图》的数字解析；

2. 根据现代数论，研究《洛书》的数字解析；

3. 根据《洛书》的“幻方”结构，建立“洛书矩阵”代数学；

4. 根据《洛书》的九宫结构，建立“洛书数字空间”与“洛书数字几何学”；

5. 研究“阴”或“阴爻”的代数定义、符号与数目是什么；

6. 研究“阳”或“阳爻”的代数定义、符号与数目是什么；

7. 研究“易”或“易卦”的代数定义、符号与数目是什么；

8. 研究建立“周易宇宙代数学”；

9. 研究建立“河洛易数学体系”。

本书以下各章就是上列9个研究命题的初步研究结果，谨此献给中国及世界的专家和学者们，敬请指教和批评。

参 考 文 献

[1]宋·朱熹撰:《周易本义》，金陵书局本。

[2]刘大钧:《周易概论》，齐鲁出版社，1988年。

[3]刘玉建:《中国古代龟卜文化》，广西大学出版社，1992年。

[4]高亨撰:《周易大传今注》，齐鲁出版社。

[5]王赣·牛力达著:《古易新篇》，黄河出版社，1988年。

[6]王赣·牛力达著:《新大衍解》，济南出版社，1992年。

[7]薛学潜:《易经数理科学新解》，台湾真善美出版社，1988年。

[8]黎凯旋:《易数浅说》，台湾成文出版公司，1982年。

[9]陈立夫主编:《易学应用之研究》，台湾中华书局(共三册)，1980年。

[10]《中国数学简史》，山东教育出版社，1986年。

[11]Wilhelm/Bagnes: "The I Ching", Princeton Univ. Press, 1967.

[12]W. S. Andrews: "Majic Square And Cubes", Dower Publications, Inc. New York, 1960.

[13]Ronan & Needham: "The Shorter Science And Civilisation In China", Cambridge Univ. Press, 1984.

第 2 章 《河图》和《洛书》的数字解析
——焦氏《河洛数论》探源

引 言

世界古代数学史记载古代中国人研究自然数并创造了 2 个典范的数型图：第一个是河图，第二个是洛书。自然，后者是以前者为先导而发展的。这两个图阵的创造显示出古代中国人在几千年前非凡的数字抽象化能力。这两个图阵标志出在漫长的岁月中人类数学思维发展出的两大类型。虽然过去从无人用现代数论观点来解释这两个图，它们仍然是纯粹数学中最早的两个数字模型图。

两千多年来，世界数学家将洛书发展为幻方，并且一直维持这种解释到今天。作者认为：在对中国古代文化的继承、重整与发扬工作中，通过现代数论的见解，重新研究河图和洛书的数字分析是必要的、有重大意义的。

一、《河、洛》数论研究必需的基本概念

数论是研究各种数集的结构、性质与运算函数的数学科学。它是一种"多方位"的学科，亦即不同的数学分支需要不同的数字理论。这里，我们首先引用数论中的一些基本概念与定义，作为剖析河图与洛书的工具。

1. 数系

现代数学中，对数系的分类是从最广的复数集合(C)开始，从而循序地界定出：实数子集(R)、有理数子集(Q)、整数子集(Z)与自然数子集(N)……。其流程如图 2－1 所示。

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$$

自然数亦称为正整数，它起源于未分割的数(也就是中国古代的'绳结计数')，它是一切数理逻辑和公理的基础，也是数学归纳法的适用范畴。

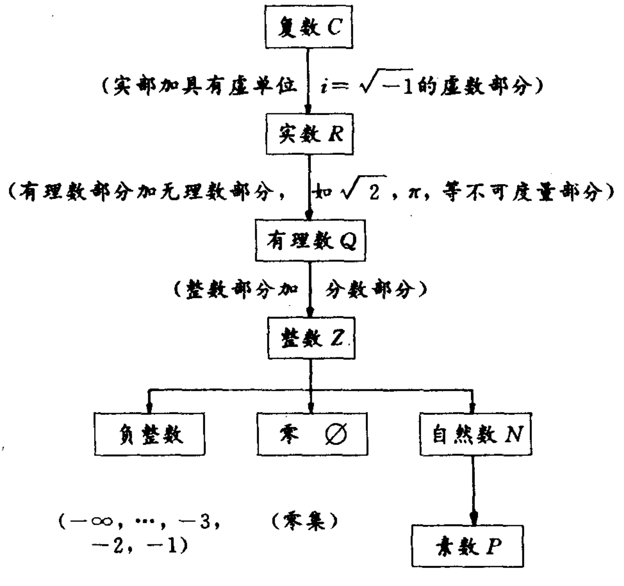


图 2-1 数集的构成图

我们看出：自然数集 N 是其他各种数集的基础。

在实际应用中，我们采用实数。实数的重要性质之一是，它

们可用如图 2—2 所示的实数直线上的点来表示。对实数集中每个实数而言，它与实数直线上的点集之间均有一一对应的关系。数与点间的对应概念还可以超越直线推广到一个平面及空间。

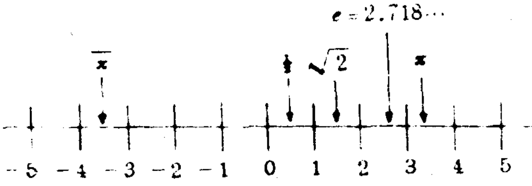


图 2-2　实数直线

2. 代数数与几何数

代数数是从包含有未知数(x, y, $z\cdots$)和常数(a, b, $c\cdots$)的代数函数中派生出来的数集。例如 3/5 与 $\sqrt{2}$ 分别是代数函数 $5x-3=0$ 与 $x^2-2=0$ 的解，故是代数数。

凡不能表示为代数多项式之解的数，吾人称它为超越数，例如 π 与 e。对某些数，例如 $e^{\sqrt{2}}$，吾人至今尚未能确定其是否系代数数。

我们也可以使数系匹配于几何坐标系，因而产生被称为矢量的几何数。例如用二重序偶(a, b)或(x, y)表示二维平面中的矢量，用三重实数(a, b, c)或(x, y, z)表示三维空间中的矢量。同理，用 n 重实数(a_1, a_2, $\cdots$, a_n)表示 n 维空间的矢量(或张量)。

总之，数的算术函数，代数多项式集合以及矢量的几何空间这三者对一切数集构成了三个同素异形的相(phase)或是“同构”(homeomorphisms)。在现代数论中，我们研究这三个数“簇”(manifold)的结构、性质与变换。

3. 封闭运算

封闭运算是存在于数集的元素间的一个二元算符操作(加、

减、乘或除)，通过运算后生成的数仍在该数集之内。例如 S 是任意一个数集，我们定义 S 在加法下是封闭的，如果对 S 内的任意两个数 a 与 b，它们的和 $a+b$ 也是 S 内的一个数。我们可以看出，自然数集在加法下是封闭的，但奇数数集 $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots\}$ 在加法下就不是封闭的。

同理，可以分别定义在减法、乘法、除法下封闭的数集。数集可以在 1 个、2 个，…直到全部 4 个算术运算下是封闭的。例如在加法和减法下封闭的数集称为模(modul)，在乘法下封闭的数集称为芒(ray)；在加、减、乘法下均为封闭的数集称为环(ring)；而在所有 4 种算术运算下封闭的数集称为域(field)。有理数集、实数集与复数集都形成域，但整数集不是域。

4. 数域与域的公设

除了上述定义，我们对数域亦可定义为：一个域 F 是其中元素用 F 内的二元加法与乘法组合成的数集 $F=\{a, b, c\cdots\}$(这里的加法与乘法是‘广义的’，即已包含有减法与除法。因为 $a+(-b)=a-b$，$a\cdot 1/b=a/b$。)。

在本文中，我们采用实数集作为建立其他数域的总集。在数域 F 内，下列公设应能成立：

a. 封闭律：F 内的每个序偶 (a, b) 以及 $a+b$ 与 ab 均属于 F；

b. 加法交换律：对任意序偶 (a, b)，$a+b=b+a$；

c. 加法结合律；对任意三序组 (a, b, c)，$a+(b+c)=(a+b)+c$；

d. 乘法交换律：$ab=ba$；

e. 乘法结合律：$a(bc)=(ab)c$；

f. 分配律：$a(b+c)=ab+ac$；$(a+b)c=ac+bc$；

g. 存在着一个零元素 0，使得对 F 内的任意元 a，有 $a+0=0+a=a$。我们称 0 为关于加法的恒等元。

h. 存在着一个单位元素，称它为 1。使得对 F 内的任意元 a，有 $a \cdot 1=1 \cdot a=a$。我们称 1 为关于乘法的恒等元。

i. 对任意 $a \neq 0$，在 F 内存在一个元素 x，使得 $ax=1$，吾人用 $1/a=a^{-1}$ 表示这个 x，并称它为 a 在乘法下的逆元素。

以数域的定义与它的二元运算为基础，数学家建立了线性函数、线性空间的概念，从而奠定了线性代数、线性几何与线性数论等近代数学学科。

5. 线性函数

最简单的线性函数的表达式为：

$$y=f(x)=ax+b$$

它由数域中的两种封闭运算(加与乘)组成。它的几何图形即直线。它是最重要的一种函数，因为一切光滑曲线均可由多段近似的直线段组成。另外，它与复数 $Z=ai+b$ 具有同样的形式。

多变量线性函数的表达式为：

$$y=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+c$$

如常数项 $c=0$，则该线性函数称为齐次的。

对线性函数组：

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

可用矩阵式 $Y=AX=B$ 来表示，式中：

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{m1}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

线性函数组的性质仅与系数矩阵 $A=[a_{ij}]$有关。因而系数矩阵 A 可称为该函数组的代表矩阵。例如吾人可将洛书作为线性函数组中的代表矩阵。

6. 线性空间

线性空间的定义为：具有任意性质的一些元素的集合，元素间的和与数性乘积均有实质意义，并仍在该集合内，且满足确定的公理。

设 X，Y，Z 是该线性空间的元素，而 1，C_1，C_2 是一个数域中的数，则下列公设成立：

a. $X+Y=Y+X$；

b. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$；

c. $1\cdot X=X$；

d. $C_1(C_2X)=C_1C_2X$；

e. $C(X+Y)=CX+CY$；

f. $(C_1+C_2)X=C_1X+C_2X$；

g. 存在一个零元素 0，使得对每个 X 合于 $X+0=X$；

h. 对每个 X 存在一个负元素 $-X$，使得 $X+(-X)=0$。

在现代数学中，许多数学实体例如算术级数、代数多项式、矢量、矩阵、微分和积分方程都可以是线性空间的元素，但是最普遍的线性空间是矢量空间。因为两个矢量之和以及一个矢量的‘数乘’积仍是该空间中的矢量。

在讨论矢量空间时，要引入矢量的线性相关与线性无关的定义：若矢量 v_1，v_2，…，v_m 中至少存在一个是其余矢量的线性组

合（由加与乘的操作组成），则矢量 v_1，v_2，…，v_m 为线性相关的。反之，则称为线性无关的。

不难看出，矢量 v_1，v_2，…，v_m 成为线性无关的必要与充分条件是：只有当 $a_1=a_2=\cdots=a_m=0$ 时，关系式 $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m=0$ 才能成立。

线性空间必须由一些线性无关的矢量张成。如一个矢量空间 V 由 n 个线性无关的矢量 e_1，$e_2\cdots e_n$ 张成，则我们定义该空间的维数为 n，并记作 $\dim V=n$，而序列 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 称为 V 的一个基底，e_1，e_2，…，e_n 为基矢。V 中任一矢量 $v\in V$ 必为 $\{e_i\}$ 的线性组合，即 $v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$，吾人称 n 序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 v 关于 $\{e_i\}$ 的坐标矢量。

基矢可用矩阵的行或列来代表。因此三维线性空间可以用 3×3 的矩阵为代表的三个行（或列）基矢张成。例如直角坐标的三维空间可用下列矩阵式来代表：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中 $e_1=(1, 0, 0)$；$e_2=(0, 1, 0)$；$e_3=(0, 0, 1)$，三者组成单位基底。

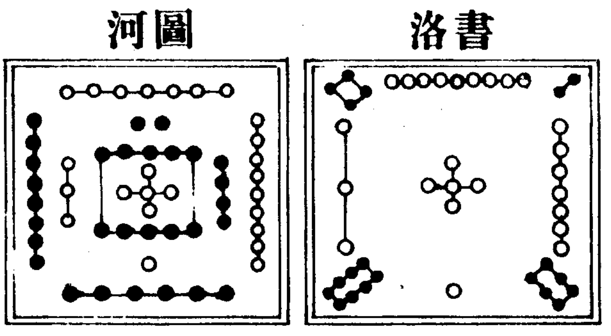
因篇幅所限，上述仅为线性空间的一些基本概念。作者现将它作为一般公设，推论出数学中的同构原理如下：自然界中，任何线性空间 V 的构成必须建立在一给定的数域 K 上。每个 n 维线性空间不论它构成元素的特质为何，吾人均可按照行（列）矢量空间的加和乘操作，不加区别。在数学中，当将物体构成的两个集合按照同一运算系统可以得出等同的性质时，吾人称之谓“同构”（isomorphism）。所有 n 维线性空间彼此是同构的，且同构于一个简单的模型，即行空间（亦即 n 序组）。这个事实可表述为一个定理：在域 K 上的一个 n 维矢量空间 V 中，任意选定基底 $\{e_1$，

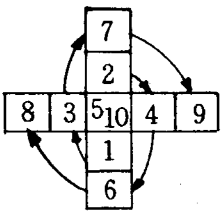
e_2, …, e_n}就可确定 V 中矢量与 K^n 内的 n 序组间一个一一对应关系，这个对应就维系了矢量和与数乘运算，从而 V 与 K^n 是同构的。关于矢量分析、矩阵论与线性代数方面的系统知识，读者可参考有关专著。

二、河图与洛书的数字分析

1. 对河图与洛书之检察

河图、洛书以及它们的数型图分别如图 2-3(a)与 2-3(b)所示。





4	9	2
3	5	7
8	1	6

(a)河图　　　(b)洛书

图 2-3

由直接观察我们看出古代中国人用点表示整数。河图系由 1

到 10 的 10 个整数的集合组成，并分成一些方环：中央数是 5，绕 5 的第一个内环由两个 5 作成的 10 组成，中心的 5 与 10 组成该图的核心部分。第二个环由 1、2、3 和 4 组成，加成另一个 10。第三个环由 6、7、8 和 9 组成，加起来正好是 30。因此我们可将河图看作是由人们的两手十指所表示的解析模型，它实际上建立了基数为 5 的数系，而且也表示了基数为 10 的十进制数系的创始。

再则，该图用白点表示奇数 1，3；5，7，9；用黑点表示偶数 2，4，6，8，10。这表明将 整数分为如图中箭头表示的奇级数与偶级数。而最有意义的是：河图模型显示了两个值得注意的形象：i)数被排列成古代中国人命名为‘纵横图’的位置，这意味着水平与垂直坐标。ii)数被分为 5 个序偶(1，6)；(2，7)；(3，8)；(4，9)；(5，10)，古代中国人称其为纵横数，这意味着数的行或列。因此我们可以将河图看作为表示座标系概念的最早的数字模型。简言之，我们可以说："在中国文明的初创阶段内，古代中国人创造了河图用来表示他们的数学思维的精华。"

现在我们转向洛书并将它作为古代中国文化内数学思维发展中第二阶段的结晶。洛书的结构是崭新的且全与河图不同。洛书仅用从 1 到 9 的 9 个数组成，并排列成被古代中国人称为"九宫"的 9 个胞腔的正方形，如图 2－3(b)所示。洛书最突出的特性是每行每列与两条对角线上 3 个数字之和都等于 15。根据洛书的这一奇幻特质，从 13 世纪开始，数学家们就将洛书发展为幻方，但直到今天，洛书的实际数学内涵却完全被幻方的框架形式所掩盖了。

进一步解译河图与洛书中的数学关系，并建立"河洛数论"的根源，就是本文的主要目的。

2. 河图的数字解析

我们从由 $n=0，1，2，3，\cdots\infty$构成的自然数开始，正整数集

N 由算术函数 $f(n)=n+1$ 所形成，表作 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$。集合 N 还包含 0 作为它的子集，因为 0 是每个集合的一个子集。集合 N 被称为归纳集(Inductive Set)，因为它具有两个特征性质：i) $1\in N$，及 ii)，若 $a\in N$，则 $(a+1)\in N$。集合 N 按照它的元素间的不同泛函关系可以分成许多分部，如由 $f(n)=2n$ 给出的偶数集合，由 $f(n)=2n+1$ 给出的奇数集合，由 $f(n)=n^2$ 给出的平方数集合等等。

应用河图数集，我们可确定其间的泛函关系，并可确定河图数集与整数数集间的命题函数。阐述如下：

(1)<u>河图数集间的泛函关系</u>

让我们将河图取作由 $H=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 表示的数集。由直接观察我们看出 H 可作为万有集，因为它可以分为两个不交的与穷竭的子集：一个是用 $H_0=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 表示的奇数子集，一个是用 $H_e=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 表示的偶数子集。H_e 与 H_0 是不交的，因为 $H_0\cap H_e=\varphi$(φ 是空集)。H_e 与 H_0 又是穷竭的，因为 $H_0\cup H_e=H$。因此 H_0 与 H_e 是彼此互余的。根据集合论，一个集合 A 的元素间的关系 R 可以通过命题函数 $P(x, y)$ 来建立，其中一个 $P(a, b)$ 给出属于 $A\times A$ 的一个序偶 (a, b)。所以，关系 R 是一些序偶的集合，而它的构造表示式是 $R=\{(x, y); y=f(x); x, y\in A\}$。用来观察河图及其数集 H，我们看到河图由 5 个序偶组成，且它的泛函关系式为：

$R_h=\{(1, 6); (2, 7); (3, 8); (4, 9); (5, 10)\}=\{(x, y); y=x+5; x, y\in H\}$

换句话说，从 H 集我们可以建立一个关系子集：

$S=\{(x, y); y=x+5\}$，它的解集是 $\{(1, 6), (2, 7); (3, 8); (4, 9); (5, 10)\}$。由于解集的所有元素均在 H 内，所以关系 R_h 的定义域是这些序偶的全部第一个元素的集合，即 $d=\{1,$

2，3，4，5}，而 R_h 的值域是第二个元素的集合，即 $r=\{6, 7, 8, 9, 10\}$。如反转每个序偶元素的次序，我们得到逆关系：

$R_h^{-1}=\{(6, 1), (7, 2), (8, 3), (9, 4), (10, 5)\}=\{(x, y); x=y+5; x, y\in H\}$

读者可在 $x-y$ 平面上画出 R_h 与 R_h^{-1}，我们看出 R_h^{-1} 恰为 R_h 的镜象。

最后，应指出：河图数集的泛函关系 R_h(或 R_h^{-1})，对整个整数数集是普遍存在的。

(2)河图作为算术级数的二维矢量空间

一个算术级数具有形状：$X=\{a, a+d, a+2d, \cdots a+nd, \cdots\}$，其通项可以线性函数 $f(n)=a+nd$ 表示，其中 a 为级数的首项，而 d 是公差。此形式又可分解为：

$X=(a, a, a, a, \cdots)+(0, d, 2d\cdots nd, \cdots)=a(1, 1, 1, \cdots)+d(0, 1, 2, \cdots n, \cdots)=ae_1+de_2$

因此二级数 e_1 与 e_2 形成级数集合的一个基底。显然，两级数之和是一个级数，以一个纯量乘一个级数也是一个级数。所以级数的集合可形成一个线性的矢量空间。鉴于有限维矢量空间的维数等于基底矢量数，因而算术级数的矢量空间的维数为 2。这个推理可应用于河图。

现在让我们取公差 $d=5$，显然河图的核心部分代表 5 的倍数集，即 $H_c=\{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10\cdots\}$。而 H_c 是整数集 Z 的一个子集，H_c 及其在 Z 内的其他陪集是：

$\overline{0}=0+H_c=(\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots)=H_c$

$\overline{1}=1+H_c=(\cdots, -9, -4, 1, 6, 11, \cdots)$

$\overline{2}=2+H_c=(\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots)$

$\overline{3}=3+H_c=(\cdots -7, -2, 3, 8, 13, \cdots)$

$\overline{4}=4+H_c=(\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots)$

对任意整数 $n\in Z$，$\bar{n}=n+H_c$ 将与上述陪集之一重合。因此由上述定理 $Z|H_c=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$形成一个陪集加法群。这个商群 $Z|H_c$ 被称为归于模 5 的整数群，且通常用 Z_5 表示。类似地，对任意正整数 n，存在着称为归于模 n 的整数群的商群 Z_n。这正好阐明了河图的结构。

我们既可把河图看作为算术级数集合的代表，因而可肯定河图数字能张成一个 2 维的矢量空间，这就阐明了为何该图内的序偶都用二元数给出。

对于一个二维矢量空间，它的单元基底为 $e_1=(1, 0)$与 $e_2=(0, 1)$。根据河图的特殊结构，我们取它的纵矢与横矢上最小矢量 $a_1=(1, 2)$与 $a_2=(3, 4)$作为它的最小基底。因而其他矢量均可表示为a_1 与 a_2 的一个线性组合。(诚然，a_1 与 a_2 必须是线性无关的。这一点很易得证，因只有当 $c_1=0$，$c_2=0$ 时，式 $c_1a_1+c_2a_2=0$ 才成立。)。

(3)河图及以模 5 同余的商集

取线性函数 $y=mx+b$ 的逆形式 $x=(y-b)/m$ 时，就打开了同余算术的大门并建立了等价关系。我们用 $f(n)=(n-r)/m$ 定义同余关系。其中 m 是模，而 r 是余数。这意味着 m 是$(n-r)$的一个约数。将同余算术应用于河图数，吾人发现河图可表为模 5 同余的商集如下。

设 R_5 是由 $x\equiv y(\mathrm{mod}5)$在整数集内定义的关系，读作“x 以模 5 同余于 y”。表示$(x-y)$能被 5 除尽，从而 R_5 是数域 Z 内的一个等价关系，在商集 Z/R_5 之内恰存在 5 个等价类：

$E_0=\{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$

$E_1=\{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11, \cdots\}$

$E_2=\{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}$

$E_3=\{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$

$E_4=\{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}$

现在，每个整数 x 可唯一地表示为 $x=5q+r$(其中 r 是余数且 $0\leqslant r\leqslant 5$)，从而 x 是等价类 E_r 中的一个元素。由于等价类是互不相交的(即 $Z=E_0\cup E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$)，因而商集 $Z/R_5=\{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\}$阐明了河图的结构。

(4)河图与毕塔哥拉斯(毕氏)定理

毕氏定理(在古代中国曾被命题为商高定理)是数论中最普遍的典范例题之一。一般定义下的毕氏方程：$x^2+y^2=z^2$ 是迪方丁(Diophantine)方程的一种典型。它包含有无限个整数解。吾人注意到这些解可分为两类：一类包含着一个基本解的线性倍数，从而所有的答案都是“相似”的，例如(3, 4, 5)；(6, 8, 10)；(9, 12, 15)…。而另一类则仅包含本原解，亦即 x, y, z 没有大于 1 的公因子，例如(3, 4, 5)；(5, 12, 13)…。现在，我们可以说明为什么河图可同时提供这两类解。

首先，如上述(2)小节中曾指出的，河图的中央胞腔代表了算术级数 $H_c=\{5, 10, 15, 20\}$，其中各项都是 5 的倍数，因此我们推出 H_c 为表示毕氏直角三角形关系的一个算术级数。例如从第一个三序组 $5^2=3^2+4^2$ 出发，可得到后续的解 $10^2=6^2+8^2$，$15^2=9^2+12^2$ 等等。

其次，以 $P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$表示河图的第一个方环和中心枢组数的集合，我们可以证明 P 是毕氏方程的生成基底。用数学归纳法，我们可先建立形成方程 $x^2+y^2=z^2$ 的生成式是：$x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$。其中 m 与 n 是整数并满足条件：i) $m>n$，从而 x 是正的。ii) m 与 n 必须没有公因子，否则该公因子的平方数将被 x, y, z 所共有。iii) m 与 n 不能同为奇数，否则 x 与 y 将含公因子 2。根据这些条件，我们得出关系式：

$$x^2+y^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2=z^2$$

若我们令 m 与 n 取符合上述这些条件的所有可能值时，就可得到全部本原解群。例如以 $P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 为基底生成数 m 与 n 的连续序偶时，则可归纳出连续的全部本原解如下：

生成数		毕塔哥拉斯三角形的边		
m	n	x (m^2-n^2)	y $(2mn)$	z (m^2+n^2)
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
5	4	9	40	41
6	5	11	60	61
7	6	13	84	85
8	7	15	112	113
…	…	…	…	…
$n+1$	n	$2n+1$	$2n(n+1)$	$2n(n+1)+1$

根据上述推理，由归纳法得结论如下：i)毕氏方程对所有符合上述三个必需条件的整数都是真实的。ii)河图数集 $H=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 中的连续元构成 m 与 n 的基底连续序偶。

(5)河图的正确排列

根据作者的研究，如果《河图》、《洛书》是一个连续发展的数学体系，则两者的序列应相互对应，协同一致。为此，图 2—3 中的河图应如图 2—4 所示，即河图中的序偶(4，9)应位于正上方；序偶(2,7)应位于核心右方。如此才能由河图转换为洛书。

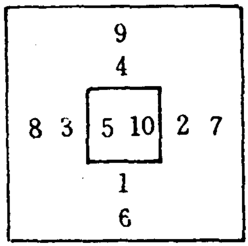


图 2—4 修正后的河图序列

3. 洛书的数字解析

根据河图的数字解析结果，我们可直接地对洛书作出类似的解析，主要发现如下：

(1)从河图到洛书

以河图作先驱，洛书从1到9的9个数字构成3×3的9个胞腔的完全正方形，每个胞腔一个数字。中心枢纽数字仍然是5。4个河图序偶(1，6)，(2，7)(3，8)(4，9)排列为这样的型序，使得正方形中的每行，每列与两条对角线上3个数之和都等于15。我们推出洛书可能是从河图创立的三阶幻方，并具有更深的内涵。

(2)洛书数间的泛函关系

让我们取洛书为由 $L=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 表示的数集。L 是一个有限集，它的元素数为奇数9。我们不可能将 L 如河图那样分成一些不相交的二元数子集；除了将 L 分为单元集外，仅有的可能是将 L 如洛书那样分为三个不相交的三元数的集合。

与前同理，在某一集 A 内我们可建立一个命题函数 $P(x,y,z)$，就中 $P(a,b,c)$ 给出一个属于 $A\times A\times A$ 的有序三元数组。对集合 L 它的泛函关系 R_l 可记作 $R_l=\{(x,y,z);\ x+y+z=15;\ x,y,z\in L\}$。通过观察我们可以解出 R_l 的解集并将其分成三组：i)关于河图中4个序偶的解集 $S_1=\{(1,6,8);(2,7,6);(3,8,4);(4,9,2)\}$。$S_1$ 的4个子集是既非不交的也非穷竭的，因为数5在该集中没有出现。ii)关于枢纽数5的解集 S_2，即 $S_2=\{(1,5,9);(2,5,8);(3,5,7);(4,5,6)\}$。$S_2$ 的4个子集是相交的，因为它们都包含5。iii)关于不交与穷竭的解集 $S_2=\{(4,9,2);(3,5,7);(8,1,6)\}$ 或是其转置形式 $S_3=\{(4,3,8);(9,5,1);(2,7,6)\}$，前者 S_3 包含三个子集，它们是洛书的三

个行，而后者 S_3 相当于洛书的三个列。

作为结论，我们说：洛书图阵就是将命题函数 $x+y+z=15$ 应用于洛书数集 $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$所得的解矩阵。

(3)洛书作为三维矢量空间的代表矩阵

在洛书中，三个行(4，9，2)，(3，5，7)与(8，1，6)是线性无关的，因而可作为一个基底并张成一个三维矢量空间。我们称之为行矢量空间。类似地，三个列矢量(4，3，8)，(9，5，1)，(2，7，6)也是线性无关的，并张成一三维矢量空间称为列矢量空间。因而洛书可作为三维空间的代表矩阵。关于它的特性读者可参考下面文章。

(4)洛书图阵与数的十进制

在数论中我们的数系是用一变元的代数多项式来表示，式中的变元就用作为数系的基数。十进制的基数为 10 并用下列多项式表示数：

$$N=(a_n, a_{n-1}\cdots a_1, a_0)=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_2 10^2+a_1 10+a。$$

其中数字 a_i 可以具有从 0 到 9 的数值。由于 0 是每个集合的子集，我们可以取洛书图阵为数的十进制系统的数集。在上述多项式中每个数字的位置表示 10 的幂数，因而实数域的十进制结构如图 2—5 所示。

$\times10^n$	$\times10^2$	$\times10^1$	$\times10^0$	$\times10^{-1}$	$\times10^{-2}$	$\times10^{-n}$
9	9	9	9	9	9	9
8	8	8	8	8	8	8
7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	5
4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	3	3

2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

图 2-5　实数域的构成

负实数作为正实数的镜象在零位线的下边。

(5)洛书与以模 10 同余的商集

作为河图的数字分析，我们曾证明每个整数 x 属于商集 Z/R_5 的一个等价类。同样，在十进制中我们必须用同余关系 $x\equiv y \pmod{10}$ 表示整数间的关系。这个等价类集合用 $Z/R_{10}=\{E_0, E_1, \cdots, E_9\}$ 表示如下：

$E_0=\{\cdots, -20, -10, 0, 10, 20, \cdots\}$

$E_1=\{\cdots, -19, -9, 1, 11, 21, \cdots\}$

$E_2=\{\cdots, -18, -8, 2, 12, 22, \cdots\}$

$E_3=\{\cdots, -17, -7, 3, 13, 23, \cdots\}$

$E_4=\{\cdots, -16, -6, 4, 14, 24, \cdots\}$

$E_5=\{\cdots, -15, -5, 5, 15, 25, \cdots\}$

$E_6=\{\cdots, -14, -4, 6, 16, 26, \cdots\}$

$E_7=\{\cdots, -13, -3, 7, 17, 27, \cdots\}$

$E_8=\{\cdots, -12, -2, 8, 18, 28, \cdots\}$

$E_9=\{\cdots, -11, -1, 9, 19, 29, \cdots\}$

通过 $m=10$ 的同余算术，我们可将整数集分为不交的组，使 $Z=E_0\cup E_1\cup E_2\cdots\cup E_9$，也就是说：洛书是商集 Z/R_{10}的矩阵表示。

4. 洛书数空间的建立

在自然界中，一个空间是一些对象、事件或状态的连续集体所形成，在该集体中可能存在有一些维系各元间的关系。数学中

可有许多种空间，例如欧几里得空间、非欧几里得空间等。这里，我们引进‘洛书空间’，因为在自然界中基础为1～9的9个数字的离散数是到处存在的。正是离散数的存在能使吾人用加、减、乘、除4种运算进行数量操作来表达万有的现象。我们定义洛书空间为：洛书空间是由一系列数字集合所构成的数学空间。这些数字集合的组成是由从0到9的10个自然数及其相互间的加、减、乘、除运算的结果。洛书空间的具体代表是洛书图阵，后者也是所有数系生成元的一个有限集。

焦氏洛书空间的构成图已示于下文第4章，图4－1。以该结构图为基础，我们看出纯粹空间的抽象概念可用三个子空间来表述：数空间、泛函空间与矢量空间。同理，在考察自然现象时，我们可以遵循三个途径：i)数字分析；ii)代数演算与iii)几何构形，而所有这三种途径都是由洛书空间的代表——洛书矩阵所发展而成。

结　　论

世界古代数学史指出，古代中国人曾致力于数型的研究并创造了两个数图：河图与洛书。这两个图阵展示了几千年前古代中国人在数理抽象方面的非凡业绩。但不幸的是，自从这两个图阵出现以后，却没有一篇文章用现代数学观点来解释它们。有鉴于此，作者认为：通过现代数论对这两个图进行数学研究是十分必要的也是很有意义的。基于研究结果，作者导出本文“《河洛数论》探源”。

关于河图研究的结论是：

1. 河图表示10个数的**集合**：$H=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，以及由 $R_h=\{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}=\{(x, y); y=x+5; x, y\in H\}$所表示的它的元素间的泛函关系。

2. 河图中的 10 个数由 5 个序偶合成并排列成由一水平行与一垂直列组成的十字形，它可以揭示数的 X-Y 坐标的原始概念。

3. 河图表示以 $e_1=(1, 2)$与 $e_2=(3, 4)$作为最小基底的一个二维矢量空间。

4. 河图表示以模 5 同余的商集 Z/R_5。

5. 河图提供了整数直角三角形的毕氏定理的基础。

关于洛书研究的结论将总述于第 5 章总结内。

参 考 文 献

[1]C. S. Ogilvy & J. T. Anderson："Excursions In Number Theory", Dover Publication, 1988.

[2] A. H. Beiler, "Recreations In The Theory of Numbers", Dover Publication, 1966.

[3]O. Ore, "Number Theory and Its History", Dover Publication, 1988.

[4]H. Cohn, "Advanced Number Theory", Dover Publication, 1962.

[5]G. H. Hardy & E. M. Wright, "An Introduction To The Theory Of Numbers", Oxford Univ. Press, 5th. Ed, 1978.

[6] Hua Loo Keng, "Introduction To Number Theory", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

第3章 《洛书》的数学研究之一

——焦氏《洛书矩阵》学说

引 言

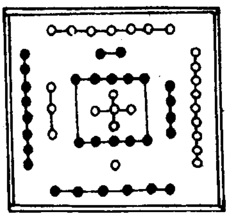
在中国及世界古代数学史中，《洛书》是中华民族在人类文化史中最早的数学创作。关于《洛书》的起源及其在中外数学领域中的传播和发展，读者可参阅英人李约瑟的《中国科学技术史》[1]，及国人黎凯旋的《易数浅说》[2]。中国先民创造《洛书》已有5000年历史，但直到现在，《洛书》在世界人民心目中仍蒙有一层奥秘色彩，中外数学家仍名之谓“幻方”；很少学者用现代数学观点，去研究并解释《洛书》的数学内涵。因此，“洛书的本质是什么”？换句话说，“洛书在现代数学内的地位是什么？”就成为一个有重大意义而需要解决的数学问题。

作者为解答这个问题，乃于1980年在美国设立爱灵敦理念书院，拟定几个有关《洛书》的基本命题，从事研究《洛书》的数学内涵，以求判定《洛书》的本质和功能。6年以来，作者根据研究成果，创立“洛书矩阵”学说，并于1986年4月，向上海及北京数学会讲演这一学说[3,4]，并提出两点建议：1. 宣布《洛书》为人类文化中第一个矩阵，2. 以《洛书》作为中华民族原始文化的标帜。

本文是第一次向中国科学界介绍焦氏“洛书矩阵”学说，敬请指教和批评。

一、简介《洛书》及其问题

中华民族原始文化发源于黄河邻近洛水地区，史称“河洛文化”。河洛文化的基本内涵是自然数，它的具体表征就是《河图》和《洛书》（图 3—1）。《河图》是由 1 到 10 的 10 个自然数的环形排列图，代表中国先民对数的性质和运算的初步认识，它示出加法和减法的运算，奇数和偶数的区别，及数量的十进位扩展，这代表当时文化的成就。到了《洛书》时代，中国先民对数的结构和变化达到更高的认识和成就。《洛书》只用 9 个自然数排列成一个正方形，构成每行、每列及两对角线上 3 个数的和都是 15。《洛书》是《河图》的精简和升华，由《河图》到《洛书》标志着中国古代数学文化的飞跃和成熟。



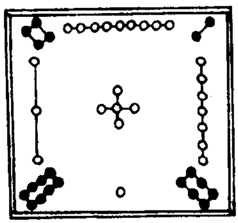


图 3-1 河图和洛书

《洛书》的奇妙结构和演算变化建立了它独特的数学形象和模式，并为中外数学家开创了位置解析、数字几何及组合分析的先河。中国古代数学家将《洛书》发展为九宫算及纵横图，西方古代数学家发展《洛书》为幻方（图 3-2）。千余年来，以《洛书》三阶幻方为基础，幻方的发展越来阶数越高，幻方的结构亦越来越幻。现代数学文献内，仍在研究幻方形成的理论和方法[5，6]。

四	九	二
三	五	七
八	一	六

洛书九宫

4	9	2
3	5	7
8	1	6

洛书幻方

图 3-2　洛书九宫与洛书幻方

《洛书》存在的基本问题是如何与现代数学挂钩。中外传统数学家虽然一致接受《洛书》的数学模式，但却从未奠定《洛书》的数学运算法则和应用。到了现代，中外数学家更一致承认《洛书》为幻方，默认它的存在缺少数学的推理基础。如果我们不能用现代数学理论解释《洛书》的数学内涵，并建立它在现代数学领域中的地位，则《洛书》将永被视作大众或游戏数学，拘束在幻方的框框内，步入中国古代传统数学的命运，成为数学史中的陈迹，不能与现代数学共生存而进步了。

二、有关《洛书》基本命题

1.《洛书》定义之研究

研究《洛书》的首要工作为给《洛书》下一个数学定义。从汉代开始，中国学者径称《洛书》九数为“二九四、七五三、六一八”，并解释《洛书》九宫谓：“九宫者，即二四为肩，六八为足，左三右七，载九履一，五居中央”(图 3—2)。《洛书》传入西方后，被名为魔方阵或幻方，并定义幻方谓：应用 1 至 n^2 个自然数，排成一个 $n\times n$ 的正方形，使得每行的和，每列的和，及两对角的和都相等(图 3—2)。显然地，这些传统描绘都未能建立《洛书》的现代数学定义、运算法则及应用功能。作者根据数学推理，主张

将《洛书》幻方的框框除掉，建立"《洛书》矩阵"的数学定义，则洛书的一切性质和运算法则均可统属到矩阵代数的领域内。

2.《洛书》分类之研究

《洛书》的基本特质有三：(1)它是以由 1 到 9 的 9 个自然数作构成元的；(2)它是由三行、三列及两对角线的 8 个三元数所组成的方阵；(3)它的构成特质或幻性是每个三元数的三元和都为 15。显然地，《洛书》的特质是由于其构成元的特殊排列及组合所致。根据排列组合原理，将 9 个不同数排列到 9 个不同位置，所能生成的不同形式可高达 $9!=9\times8\times\cdots\times2\times1=362,880$ 个，如何由如此巨大的可能组合中定出《洛书》幻方，自为一值得探讨的问题。解决此问题的关键自在《洛书》分类的研究。作者将《洛书》的可能排列作为一个集，再按照对称操作所形成的群，定出依照幻性高低《洛书》可区分为四类：(1)《洛书》本体：即《洛书》的原创形式，幻性最高，共有 8 式。(2)《洛书》变体：系由《洛书》本体移置而成，将本体内的中心 5 分别置换为 1 到 9 的其他 8 个数，则得出两对角线不一定具有幻性的变体《洛书》，共有 64 式。(3)自然《洛书》：系由 9 个自然数按照自然顺序排列组成，为《洛书》的基本形式，共有 72 式。(4)杂体《洛书》：此为不规则排列及幻性最低的《洛书》。

3.《洛书》形成之研究

中国先民如何创造《洛书》，因无历史记载，自属一奥秘问题。作者本诸数学问题必可用数学方法解决的原则，探讨《洛书》的形成乃数学操作的必然结果。自然界事物的产生是由概率决定的，作者设想《洛书》的形成是由 9 个基本自然数的排列和组合的概率所致。作者创造了《洛书》形成的概率表和概率曲线图，示出《洛书》本体的形成乃是最大概率的结果。

4.《洛书》目的之研究

《洛书》作为一个数学实体或模型，必有其物理意义及应用。作者定义洛书为矩阵，它就成为建立线性系统的一个基础，但这超出本文所能讨论的范围。作者现只提出一个基本问题：中国先民创作《洛书》的原始目的是什么？换句话说：《洛书》的几何意义是什么？作者的回答是：《洛书》就是应用由 1 到 9 的自然数，作为对宇宙空间几何结构由 0 到 360 度的数学解释。当将《洛书》作为三阶矩阵时，其中 3 个三元数就表 3 个三维向量，《洛书》就张成一个向量空间，而《洛书》的行列式值就是所成几何形体的体积。作者根据这些矩阵的基本定理，奠定了《洛书》矩阵学说的基本意义：三维向量空间由 0 到 360 度的几何结构变化，就是《洛书》由自然洛书到《洛书》本体的结构变化。这就是《洛书》的内涵，这就是《洛书》的奥秘。《洛书》对人类文化的最大贡献，就是它只用 9 个基本自然数的代数运算方法，示出空间几何结构由 0 到 360 度的变化。直到今日，现代数学尚未能达到此一成就！

5.《洛书》转变机构流程之研究

作者将《洛书》的各种可能排列作为一个数学中的集，再根据群论中的对称操作，定出应用《洛书》的不同形式转变，示出空间几何结构由 0 到 360 度的转变机构流程。吾人由这种转变机构流程，可以领会出《洛书》内涵中的数学、科学与哲学意义。

三、焦氏“洛书矩阵”学说

1. 焦氏“洛书定义”

《洛书》的广意定义是：“洛书是用由 1 到 9 的自然数作元所

构成的三阶矩阵”。只需将《洛书》的幻方式与现代数学的矩阵式等同挂钩，就可奠定《洛书》为人类文化史中第一个矩阵。

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\ \hline 3&5&7\\ \hline 8&1&6\\ \hline \end{array} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 4&9&2\\ 3&5&7\\ 8&1&6 \end{bmatrix}$$

2. 焦氏“洛书分类”

按照《洛书》内构成元的排列组合特质，《洛书》可区分为4类：

(1)《洛书》本体：

《洛书》中每行、每列及两对角线的三元和都必须相等。按照矩阵及其转置式的垂直和水平对称，《洛书》本体共有8式(图3—3)。

2	9	4	4	9	2		8	3	4	4	3	8	
7	5	3	3	5	7		1	5	9	9	5	1	
6	1	8	8	1	6		6	7	2	2	7	6	
6	1	8	8	1	6		6	7	2	2	7	6	
7	5	3	3	5	7		1	5	9	9	5	1	
2	9	4	4	9	2		8	3	4	4	3	8	

图3—3 《洛书》本体8式

(2)《洛书》变体：

《洛书》中每行及每列的三元和都必须相等。《洛书》变体系由《洛书》本体的中心5分别移置为其他8数而得，共有64式(图3—4)。

4	9	2
8	1	6
3	5	7

5	9	1
7	2	6
3	4	8

6	8	1
7	3	5
2	4	9

1	8	6
9	4	2
5	3	7

3	4	8
5	9	1
7	2	6

5	3	7
1	8	6
9	4	2

4	3	8
2	7	6
9	5	1

3	8	4
7	6	2
5	1	9

图 3—4 《洛书》变体(共 64 式)

(3)自然《洛书》：

系由 9 个自然数按照自然顺序排列组成，为《洛书》的基本形式，共有 72 式。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

(4)杂体洛书：

此为下余不规则排列及幻性最低的洛书。

3. 焦氏“洛书形成”学说

《洛书》的形成乃是 9 个自然数排列组合的必然结果。作者设计它的形成方法如下：将 9 个数分别写在 9 个相同的筹码上，置入袋内，每次抽出 1 数，不再放回，连抽 3 次，即组成第一个三元数。如是重复，抽得第二及第三个三元数，在所有三元数中，三元和的最低值必为 $1+2+3=6$，最高值必为 $7+8+9=24$，平均值自为 $(6+24)\div 2=15$。再者，每个三元数都有 6 个不同组合，例如 123，132，213，231，312，321。根据这种排列组合原理，作者创立了《洛书》本体的形成概率表(表 3—1)，示出《洛书》本体的生成，乃是最大概率的必然结果。读者用三元和为横轴，用

组合数为纵轴，即可谱出《洛书》本体生成的概率曲线图。

表 3－1 《洛书》本体中八个三元数的形成

三元和	三元数	组合数	三元和	三元数	组合数
6	123	6	24	987	6
7	124	6	23	986	6
8	125 134	12	22	985 976	12
9	126 135 234	18	21	984 975 876	18
10	127 136 145 235	24	20	983 974 965 875	24
11	128 137 146 236 245	30	19	982 973 964 874 865	30
12	129 138 147 156 237 246 345	42	18	981 972 963 954 873 864 765	42
13	139 148 157 238 247 256 346	42	17	971 962 953 872 863 854 764	42
14	149 158 167 239 248 257 347 356	48	16	961 952 943 871 862 853 763 754	48
15	159 168 249 258 267 357 438 456	48	这 8 个三元和为 15 的三元数构成《洛书》本体		

1. 三元数的总数＝2×(1＋1＋2＋3＋4＋5＋7＋7＋8)＋8

＝84

2. 组合数的总数＝9×8×7

＝2×(6＋6＋12＋18＋24＋30＋42＋48)＋48

＝504

3. 《洛书》本体形成的概率＝48/504

＝8/84

＝9.52%(本系统中的最大概率)

4. 焦氏“洛书目的”学说

为了解释《洛书》的目的或其物理与几何意义，作者建立了“洛书矩阵”学说。中国先民为何要创造《洛书》？作者的回答是：《洛书》就是应用由 1 到 9 的自然数的组合变化，作为对宇宙空间结构由 0 到 360 度的数学解释。根据矩阵代数的基本性质[7,8]，

可以归纳出《洛书》矩阵的三个基本定理：(1)《洛书》矩阵的行列式值等于矩阵中三个组成向量所构成的几何形体的体积。(2)自然《洛书》的行列式值为 0。(3)《洛书》本体的行列式值为 360。作者根据这 3 个定理，奠定了“洛书矩阵”学说的中心意义：三维向量空间由 0 到 360 度的几何结构变化，就是《洛书》矩阵由自然《洛书》到《洛书》本体的组合结构变化。这就是《洛书》的奥秘，这就是《洛书》的数学内涵。

5. 焦氏“洛书转变机构流程”

应用群论中的对称操作原理，作者定出《洛书》矩阵组合转变的机构流程，示出其行列式值[D]由 0 到 360 的转变。对称转变方法多端，现只示出两个范例：

(1)奇偶交换及对置交换流程：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&4\\\hline 3&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&4\\\hline 3&5&7\\\hline 6&8&9\\\hline\end{array}$$

1	2	3	4
自然洛书	1←→2	3←→4	6←→7
$D=\|0\|$	$D=\|9\|$	$D=\|35\|$	$D=\|31\|$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&4\\\hline 3&5&7\\\hline 6&9&8\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&9&4\\\hline 3&5&7\\\hline 6&1&8\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 6&1&8\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array}$$

5	6	7	8
8←→9	1←→9	2←→4	6←→8
$D=\|40\|$	$D=\|120\|$	$D=\|240\|$	$D=\|360\|$

(2)转动及对置交换流程：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&1&2\\\hline 7&5&3\\\hline 8&9&6\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 7&5&3\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array}$$

1	2	3	4
自然洛书	顺时针向转 45°	$1\longleftrightarrow 9$	$3\longleftrightarrow 7$
$D=\|0\|$	$D=\|40\|$	$D=\|120\|$	$D=\|360\|$

两者比较立刻得出以下关系：

i. 奇隅交换即等于 45°转换。

ii. 上结果所生互为镜象。

iii. 上两者 1 与 9 交换结果所生 D 值相同并互为镜象。

结　语

在现代数学中，《洛书》被中外数学家作为“幻方”来研究和处理，不只《洛书》的数学内涵被拘束于幻方的框框内，不得翻身；而《洛书》亦被视作大众或游戏数学，不能建立它应有地位。作者根据《洛书》的结构和数学推理，主张将“洛书幻方”的框框除掉，建立“洛书矩阵”学说，并奠定了《洛书》的数学定义、分类、形成、目的和转变 5 项基本研究成果。“洛书矩阵”学说的中心意义是：三维向量空间由 0 到 360 度的几何结构变化，就是“洛书矩阵”由自然《洛书》到《洛书》本体的组合结构变化。“洛书矩阵”学说的建立，使《洛书》成为自然界中线性系统的建立基础，发挥出联系原因与结果、作用与反应以及输入与输出的基本功能。

参 考 文 献

[1]李约瑟：《中国科学技术史》，中文译本，第 19 章，卷 3，第 123～

137 页。

[2]黎凯旋:《易数浅说》,台北成文出版公司,1982 年,第 6 版,第 207～249 页。

[3]戴小桦:《六年攻洛书成果报中华》,上海科技报,1986 年 4 月 26 日。

[4]惠文恺:《古人用"洛书"解释宇宙空间》,上海新民晚报,1986 年 4 月 24 日。

[5]丛汲泉:《2^m 阶幻方的生成》,数学的实践与认识,1984 年,第 1 期,第 26～34 页。

[6]李忠祥:《用加框法生成幻方》,北京钢铁学院学报,1985 年,增刊 1,第 45～53 页。

[7]F. R. Gantmacher, "Matrix Theory", Vol I & II, Chelsea Publishing Co. 1977.

[8] P. Lancaster & M. Tismenetsky "The Theory Of Matrices", Academic Press, 1985.

附录 1. 洛书图阵的 72 种形式(第 1 页)

4	9	2	3	5	7	2	9	4	2	6	7	3	8	4	4	8	3	7	5	3	7	6	2
8	1	6	8	1	6	6	1	8	9	1	5	5	1	9	9	1	5	6	1	8	5	1	9
3	5	7	4	9	2	7	5	3	4	8	3	7	6	2	2	6	7	2	9	4	3	8	4

5	9	1	3	4	8	1	9	5	1	6	8	3	7	5	5	7	3	8	4	3	8	6	1
7	2	6	7	2	6	6	2	7	9	2	4	4	2	9	9	2	4	6	2	7	4	2	9
3	4	8	5	9	1	8	4	3	5	7	3	8	6	1	1	6	8	1	9	5	3	7	5

6	8	1	2	4	9	1	8	6	2	7	6	1	5	9	6	7	2	9	4	2	9	5	1
7	3	5	7	3	5	5	3	7	4	3	8	8	3	4	8	3	4	5	3	7	4	3	8
2	4	9	6	8	1	9	4	2	9	5	1	1	5	9	1	5	9	1	8	6	2	7	6

1	8	6	5	3	7	6	8	1	5	9	1	1	9	5	7	3	5	7	2	6	6	2	7
9	4	2	9	4	2	2	4	9	3	4	8	8	4	3	2	4	9	3	4	8	8	4	3
5	3	7	1	8	6	7	3	5	7	2	6	6	2	7	6	8	1	5	9	1	1	9	5

2	9	4	2	7	6	4	3	8	4	9	2	8	1	6	8	3	4	6	1	8	6	7	2
7	5	3	9	5	1	9	5	1	3	5	7	3	5	7	1	5	9	7	3	5	1	5	9
6	1	8	4	3	8	2	7	6	8	1	6	4	9	2	6	7	2	2	9	4	8	3	4

附录 1. 洛书图阵的 72 种形式(第 2 页)

4	8	3
2	6	7
9	1	5

9	1	5
2	6	7
4	8	3

3	8	4
7	6	2
5	1	9

4	2	9
8	6	1
3	7	5

5	7	3
1	6	8
9	2	4

5	1	9
7	6	2
3	8	4

3	7	5
8	6	1
4	2	9

9	2	4
1	6	8
5	7	3

1	6	8
5	7	3
9	2	4

4	3	8
2	7	6
9	5	1

9	5	1
2	7	6
4	3	8

1	5	9
6	7	2
8	3	4

8	6	1
3	7	5
4	2	9

9	2	4
5	7	3
1	6	8

8	3	4
6	7	2
1	5	9

4	2	9
3	7	5
8	6	1

5	3	7
1	8	6
9	4	2

9	4	2
1	8	6
5	3	7

7	3	5
6	8	1
2	4	9

2	4	9
6	8	1
7	3	5

2	6	7
4	8	3
9	1	5

5	1	9
3	8	4
7	6	2

7	6	2
3	8	4
5	1	9

9	1	5
4	8	3
2	6	7

3	4	8
5	9	1
7	2	6

7	2	6
5	9	1
3	4	8

8	4	3
1	9	5
6	2	7

3	5	7
4	9	2
8	1	6

6	1	8
2	9	4
7	5	3

6	2	7
1	9	5
8	4	3

7	5	3
2	9	4
6	1	8

8	1	6
4	9	2
3	5	7

附录2　六年攻洛书　成果报中华

——访美国爱灵敦理念书院院长焦蔚芳博士

1986年4月22日，美籍华人焦蔚芳博士在上海数学会举行的学术报告会上宣布了自己花6年时间研究出来的学术新成果——一篇题为《中华民族原始文化的标志——洛书》的论文。他提出洛书是中华民族原始文化标志的论说，受到本市数学界和各方人士的高度重视。

会后，记者特地走访了焦博士。

问："为什么说洛书是中华民族原始文化的标志?"

焦博士回答说："中国文化的源泉是'河洛文化'，河图与洛书都是五六千年前在黄河、洛水一带发现的龟甲。河图上刻有1到10的10个自然数排列图形，而稍后发现的洛书则刻有1到9的9个自然数排列图。从河图可以得知，早在几千年前，中国先民对自然数的性质和运算就有了认识，他们知道了加法的运算和奇偶数的区别，并且知道数量的扩展是以10为单位的。这代表了当时文化的成就。相比河图，洛书则标志着中国原始文化的更高成就，它只用了9个自然数排列成一个正方形，每行和对角线上的3个数的和都是15。洛书的奇妙结构和无穷变化令中外数学家为之叹服！它是中国先民心灵思维的最高成就，也是中国文化的典型模式，不带有任何外来文化的色彩。它奠定了人类文化的初基。中华民族的基本哲学观念，如天、地、人三才哲学、中庸哲学、易经哲学和自强不息哲学，都是洛书的直接文化产物。所以，我认为洛书是我国原始文化的标志。"

"洛书有些什么价值？它对世界文化又有些什么影响"?

"至于洛书的价值，我可以这样说，它为古今中外的数学家

开创了位置解析和数字几何的先河，它的内涵包括了许多物理数学等科技原理和功用，它不单能为各种自然科学所应用，还可成为电子网络及电脑自动控制系统的中心学说。它是人类文化史上的第一个阵量，是联系自然界中原因与结果、作用与反应关系的比例系数；同时也是建立数域的单位和基础。洛书的原理能应用到社会、经济、教育、艺术 各个领域，对人类社会的文明有着极为重要的价值！西方的计算机，都与洛书有关，电子计算机的二进位换算、键盘设计、电路网道理都是根据洛书原理设计的。”

“您是怎样想到要研究洛书的呢。又为什么要选择在中国发表自己的研究成果?”

焦博士说：“洛书对人类进步有着如此大的价值，却鲜为人知，而在它出现后的5000年历史中，因其只有数字的排列符号而无文字说明，一直被人视作‘天书’而无法揭开它的奥秘。西方人认其为幻方或魔阵，中国人用之得五行生尅，至今没能使洛书在现代数学中占居一定位置，我认为这是我们中国人的耻辱！1980年我在美国设立了爱灵敦理念书院，专门研究洛书的数学内涵，决心要为洛书名正身份、判定功能。6年来，我勤奋工作，犹如一个怀胎孕妇渴望早日分娩出婴儿一样。现在根基有成，终于可以宣布洛书为人类文化史上的第一个三维阵量(Matrix)了，我是多么的高兴！我想到，没有祖国伟大的文化，也就没有我今天的成就，我应该把自己的研究成果献给祖国，以此来报效中华！”

（记者　戴小桦）

附录3　古人用“洛书”解释宇宙空间

焦蔚芳博士日前在沪提出河洛文化新说

(新民晚报)讯　前天(1986年4月22日)上午，上海市数学

会举行了一次数学研究学术报告会，由华裔美籍学者焦蔚芳博士主讲，题目是：《中华民族原始文化的标帜“洛书”》。

焦博士河南汲县人，西北工学院毕业后出国留学与从事科研工作。

相传“河图”的出现甚早，“洛书”的出现较晚，传说大禹治水时，洛水中浮现出一只大龟，背有九数，是天给禹的启示，即后人演绎为“九宫”的“洛书”。古人对“河图”与“洛书”都有大量的研究，但不免带有迷信色彩，很少从数学角度去探索。焦博士经过多年研究，认为中华民族原始文化的根或泉源是“河洛文化”，就是发源于黄河邻近的洛水地区的文化。“河图”是代表人类双手的数，从而演进为十进位制。“洛书”是“河图”的精简和升华。由“河图”到“洛书”标志着中国原始文化的飞跃和成熟。

中国先民为何要创造“洛书”?焦蔚芳说：“洛书”就是应用由1到9的天然数，作为对宇宙空间结构由0到360度的数学解释。

（惠文恺）

附录4 为什么说洛书是中华民族原始文化的标志

1986年4月22日，美籍华人焦蔚芳博士在上海数学会举行的学术报告会上提出洛书是中华民族原始文化标志的论说，受到上海数学界和各界人士的高度重视。

焦博士说，中国文化的源泉是“河洛文化”，河图与洛书都是五六千年前在黄河、洛水一带发现的龟甲。河图刻有1到10的10个自然数排列图形，而稍后发现的洛书则刻有1到9的9个自然数排列图。相比河图，洛书则标志着中国原始文化的更高成就，它只用了9个自然数排列成一个正方形，每行和对角线上的3个数的和都是15。洛书的奇妙结构和无穷变化令中外数学家为之叹服！它是中国先民心灵思维的最高成就，也是中国文化的典

型模式，不带有任何外来文化的色彩。它奠定了人类文化的初基。中华民族的基本哲学观念，如天、地、人三才哲学、中庸哲学、易经哲学和自强不息哲学，都是洛书的直接文化产物。所以，我认为洛书是我国原始文化的标志。

在谈到洛书的价值和影响时，焦博士说，它为古今中外的数学家开创了位置解析和数学几何的先河，它的内含包括了许多物理数学等科技原理和功用，它不单能为各种自然科学所应用，还可成为电子网络及电脑自动控制系统的中心学说。

（原文载《上海科技报》1986 年 4 月 26 日　1986 年 5 月 18 日《文摘报》摘登）

附录 5　焦蔚芳博士书面谈话

时间：1986 年 4 月 22 日至 5 月 12 日

对象：中国数学会，科学技术协会及新闻记者

题目：中华民族原始文化的标帜——“洛书”

（焦氏“洛书阵量”学说）

(Chiao's "Lo-Shu Matrix" Theorey)

中华民族的先民在 5000 年前公布了他们的伟大创作“洛书”，要作为人类文化的基石，传之后代永远。但因其只为 9 个天然数的排列符号，而无文字说明，“洛书”就成了一部无字天书；中外学者很少从现代数学角度去探索研究。西方人认其为幻方或魔阵，中国人用之于纵横图或五行生尅。只到今日，洛书尚未能在现代数学中占居一定位置，岂非中国人的莫大耻辱！

我有鉴及此，乃于 1980 年在美国设立了爱灵敦理念书院，专门研究洛书的数学内涵，为洛书名正身份，判定功能。6 年以来，奠定了洛书的五项基础定理。兹特返回祖国，正式宣布洛书为人类文化史上第一个三维阵量(Matrix)，并倡导以洛书为中华民族

原始文化的标帜。下面是我讲演的主要内容及5项研究成果：

1. 中华民族原始文化的根或泉源是“河洛文化”，就是发源于黄河邻近洛水地区的文化。

2. 河洛文化的基本内涵是数，它的具体表征是“河图”和“洛书”，即史籍所载：“河出图，洛出书，圣人则之”。

3. 河图是代表人类双手的数的符号，它示出了两个数学定理：(1)数的衍生是十进位制，(2)数可区分为奇数和偶数，1、3、5、7、9为奇数，2、4、6、8、10为偶数。

4. 焦氏“洛书定义”：洛书的广义定义是：“洛书是由1到9的自然数作元素所构成的三维阵量。”我将古代洛书的九宫式与现代数学的阵量式等同挂钩，奠定洛书是人类文化史上第一个阵量。

5. 焦氏“洛书分类”：按9个数的排列方式及特性，洛书可分为4类：(1)自然洛书；(2)洛书本体；(3)洛书变体；(4)杂体洛书。

6. 焦氏“洛书形成”学说：自然界事物的产生是由概率决定的，我推想洛书的形成是由9个基本天然数的排列和组合的概率所致，我创造了洛书形成的概率表和概率曲线图。

7. 焦氏“洛书目的”学说：洛书就是应用由1到9的自然数，作为对宇宙空间结构由0到360度的数学解释。

8. 焦氏“洛书转变机构流程”：我定出应用洛书的不同形式，示出空间几何结构由0转变到360度的机构流程。

9. 洛书的直接文化产物：中华民族的重要基本哲学观念都是源自洛书的，例如(1)天、地、人三才哲学；(2)中庸哲学；(3)易经哲学，；(4)自强不息哲学；以及(5)中国的数学思想和方法。

第4章 《洛书》的数学研究之二
——焦氏《洛书数字几何学》导论

引　言

在对中国传统数学的探索中，可以发现一个“焦点性”的问题：“为何中国古数学家未能把几何学建立为数学中的一个独立分支?”回顾历史我们看到，中国古数学家往往倾向于数理和代数，他们在应用几何图形时，也注重于用度量和代数法来处理它们以求解决实际问题。在这方面，中国与古希腊的数学家显示出鲜明的对比。李约瑟(Joseph Needham)在其《中国科技史》一书中也曾论述过这一焦点问题，并认为这是中国传统数学之所以未能发展为现代数学的主要原因。上述的焦点还引出另一个重要问题：“为何中国古数学家经常以代数形式提出几何方面的命题?”当然，要全面探讨这些问题，将超出本文的范围，本文仅讨论其中的一点：“中国古代的洛书与现代抽象几何的关系。”因为众所周知，洛书是中国的数学之源，而在洛书图阵的整数关系中是否含有抽象几何的现代概念?或是通过洛书图阵的结构可以建立这些概念。这将是本文的主要研讨目标和内容。

中国古数学家曾用“像”、“数”、“理”三字来概括数学研究的范畴。用现代数学观点来看，这三者正与几何、代数和数论这三大数学分支相对应。作者在洛书的数学研究方面也建立了相应的研究成果：其一是以代数学为前导，即焦氏“洛书矩阵论”；其二是以解析几何为前导，即本文——焦氏“洛书数字几何学”；其三

是以数论为前导，论文即将发表。至于本文的重点则包括洛书空间的构成、洛书空间的特质，以及焦氏“洛书几何学”的基本命题。现分别叙述如下。

一、洛书空间的构成

自然界中存在着 3 个内在的数学实体：“空间”、“时间”、“数字”。从“空间”中，我们可以得到有关位置、方向、平行、垂直和几何外形等等的概念；应用“时间”，我们可以描绘有关运动、速度、频率、周期性和动力性等等的物理现象；应用“数字”，我们建立了计算、度量、有序性、算术运算和函数关系等等的数学方法。所谓“数学之科学”的主要内容就是研究上述 3 个实体之间的相互作用与内在联系，而其关键就是用数字(数学模型)来描绘空间(事物)与时间(运动)的关联。

数字是数学的根基，而数字的数学意义又可通过代数和几何这二条途径来表明。代数用符号和函数方程式来处理数字运算；解析几何则用坐标系统来处理数字的图示外形。代数符号化及运算与数字的关系正好跟解析几何中轴系与数字的关系相对应。因而代数函数可通过解析几何用图像来表示；反之，几何图像也可用代数函数来表示。这样，数字、代数、几何三者构成一种“三相循环”关系。换句话讲，代数与几何是数字的两种表现形式与应用方式。

基于上述概念，我们可以设想一个囊括上述关系的空间，并名之曰“洛书空间”(Lo－Shu Space)。

1. 洛书空间的构成图解

一个三维空间必须由 3 个独立的基矢群(坐标系)构织而成。在三维坐标系统中，矢量必由 3 个数量组成，张量必由 3 个矢量

组成。根据这一概念，我们分别应用函数(多项式)、矢量和数字的 3 个三维空间的相互转变，建立起来一个“三相循环”所构成的空间，我们称它为“洛书空间”。图 4-1 示出三维洛书空间的构成图解。

2. 洛书空间的定义

洛书空间是由一系列数字集合所构成的数学空间。这些数字集合的组成是由从 0 到 9 的 10 个自然数及其相互间的加、减、乘、除运算的结果。洛书空间的具体代表就是洛书矩阵。从洛书矩阵，可以开发出洛书代数、洛书几何和洛书数论这三门数学分支。而洛书空间本身自包涵有函数、矢量和数字 3 个次空间(图 4-1)。

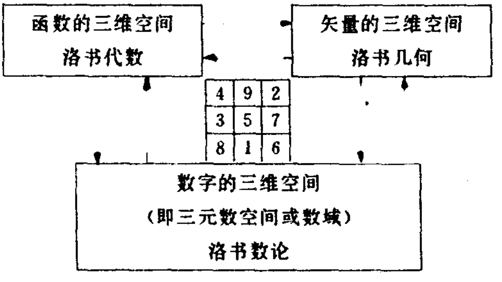


图 4-1　焦氏洛书空间的构成图解

在自然界中，我们可将任一种均质现象的连续集合视为一个空间。宇宙本身就是一个非常复杂的且具有无限维数的空间。在数学上，我们采用自然数列作为建立诸如可数性、基数性、一一对应性等基本数学概念的基础。而洛书空间正是由自然数构成，由自然数本身所具有的、内在的、解析的、不需证明的公理来阐明，因而它代表了一切感性认识中最优先的一种数字集合。图 4－1 所示的三维洛书空间就是客观存在且亦可被人们的感官所觉察的空间。依此推演，自可衍生出 n 维空间。

二、洛书空间的特质

如果上述的洛书数字空间可以描绘自然界中的客观现象及显示物理世界的映像，它必须具有一些特有的性质以作为判定现象的指导推测。这些特质中最主要的是：

(一)洛书空间一定是一个线性系统，构成该空间的数学操作是加与乘。

(二)洛书空间是无限的，但是通过数学操作亦可变成有限(有定)的。

(三)洛书空间为连续的，但亦可被数学运算划分成许多互不连续的群(Group)。

(四)洛书空间可由实数和虚数、有理和无理数组成。

(五)洛书空间并非一成不变，而是可以重复地膨胀与收缩。

(六)洛书空间具有均质、对称和平衡性。

(七)洛书空间能作周期性地运动或永不休止地变化。

(八)洛书空间具有量子化的特质。

可以说，洛书矩阵论、洛书几何学与洛书数论均由上述的特质演绎而成。因限于篇幅，本文仅扼要讨论洛书几何学中如下若干主要特质：

1. 洛书空间的线性本质

洛书空间中的一切单元(Element)都必须满足于线性关系式：$Y=mX+b$。式中 X 与 Y 为单元中的变数，m 与 b 为单元中的参数。该线性方程不仅可以描绘出自然数域(*Field*)，而且也是由自然数域导出其他数域的基本方程。它的运算操作只有加和乘两种，因而满足上述特质(一)。基于这一线性方程，我们可在整数、实数、复数、有理数、无理数等一切数域的基础上构成洛书空间(符合于特质(四))。

2. 在整数数域内形成洛书矩阵

整数数域为十进制系统。十进制的独特表现形式在于只需用10个数字(0，1，2…8，9)即可表达一切数。(其中各数字的位置表示10的指数)。在十进制中，一切整数均可由上述线性方程来构成。此时，m 为10的倍数，b 为0至9中的任一数。或是以下列方程来表示：

$$Y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

按照数学常规，零集合是一切集合的子集合，零以外的9个数字(1，2，3，…8，9)可以组成一个数字集合，现称之为洛书数字集合。用这9个数字构成的3×3矩阵即洛书矩阵。洛书矩阵可以代表含有自然数域(N)、整数数域(Z)和实数数域(R)的三维洛书空间。

对整数集合进行加与乘的运算处理后得到的无穷数域演示了洛书空间的连续与无限性(即特质(二)、(三)的一个方面)。

3. 将整数数域分割成等价组(Equivalence Classes)

取线性方程的逆置形式：$X=\dfrac{Y-b}{m}$，并定义：

$$f(X)=\frac{X-b}{m}\quad 或：X\equiv b(\text{mod m})$$

上式为同余模式(Congruence Modulus)，式中 m 为模数，b 为余数。其意义为 X 对余数 b 与模数 m 存在“同余”关系。亦即 X 与 b 系两个等价整数(因为它们被模数 m 除后的余数相同)。这样，通过同余模式中的减与除二个运算操作可以实现同余关系，当模数 $m=10$ 时，可以把十进制的整数数域分为10个等价组。代表这10个等价组的基数即0、1，2…8，9这10个数字。等价组又名商集(Quotient Set)，并以数学式 $Z/R_{10}=E_0$、E_1，…E_8，E_9 来代表，如表4－1：

表 4-1　整数数域以模数 m=10 的同余关系分割成 10 个等价组

$E_0=(--,\ -20,\ -10,\ 0,10,\ 20,--)$

$E_1=(--,\ -21,\ -11,\ \mp1,11,\ 21,--)$

$E_2=(--,\ -22,\ -12,\ \mp2,12,\ 22,--)$

$E_3=(--,\ -23,\ -13,\ \mp3,13,\ 23,--)$

$E_4=(--,\ -24,\ -14,\ \mp4,14,\ 24,--)$

$E_5=(--,\ -25,\ -15,\ \mp5,15,\ 25,--)$

$E_6=(--,\ -26,\ -16,\ \mp6,16,\ 26,--)$

$E_7=(--,\ -27,\ -17,\ \mp7,17,\ 27,--)$

$E_8=(--,\ -28,\ -18,\ \mp8,18,\ 28,--)$

$E_9=(--,\ -29,\ -19,\ \mp9,19,\ 29,--)$

等价组通过加与乘运算可形成一有限数域：

$a(\bmod 10)+b(\bmod 10)=(a+b)(\bmod 10)$

$a(\bmod 10)\cdot b(\bmod 10)=ab(\bmod 10)$

根据上述的规则构成加、乘二表，如图 4-2

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

图 4-2　加法与乘法表

此表显示每一基数都具有其加法与乘法逆数

等价组的构成表示了数域的隔离性与有限性，亦即演示了洛书空间的不连续性与有限性(特质(二)、(三)的另一方面)。

三、建立洛书几何的前言

1. 洛书图阵的对称性

如果在数字结构上我们说洛书是一个“幻方”(图 4-3*a*)，那末在图形方面我们可以看出它具有正方形的对称性(图 4-3*b*)。

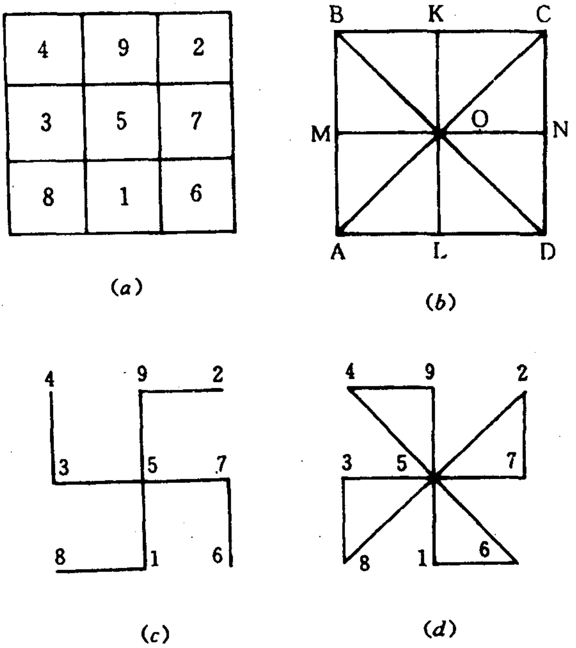


图 4-3　从洛书图阵绘出的几何图形

由图中得出：正方形 $ABCD$ 相对于以 O 为中心以 90°为倍数的角度旋转时总是对称的(4 个位置)，此外，它相对于对角线 AC，BD 和垂直线 KL，MN 也是对称的。(以上共 8 个对称度。)基于数字间的对称和均衡关系，从洛书图阵中还可以作出很多几

何图形，图 4－3c 与 4－3d 中的卐字形和风车形为其 2 例。附录 1 所示图形的线条表示其中的数字关联，而这些数字关联演示了图形的对称性与均衡性。

2. 洛书基矢

将洛书矩阵中的 3 行或 3 列作为 3 个空间矢量，并将它们作为三维坐标系统中的基矢(Base Vector)，是为洛书基矢。定义如下：

$$\begin{array}{lcl} A=(4,3,8) & & A'=(4,9,2) \\ B=(9,5,1) & \text{或} & B'=(3,5,7) \\ C=(2,7,6) & & C'=(8,1,6) \end{array}$$

四、焦氏洛书数字几何学基本命题

1. 洛书坐标系统

(1)在基元(Unit Base)基础上形成的洛书坐标系

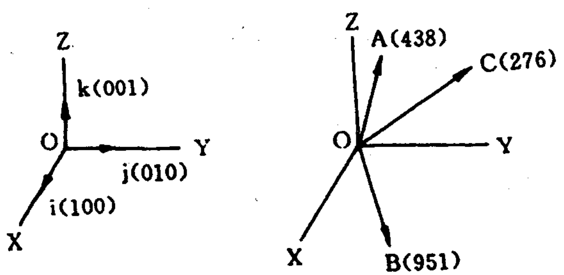


图 4-4　在卡氏坐标系的基础上构成洛书坐标系

将洛书图阵中的 3 行(或 3 列)三元数(Triad)当作 3 个基点，并如上面所述构成 3 个洛书基矢(即洛书坐标系中的基元)。对照

卡氏(Cartesian)坐标系可构成洛书(Lo-Shu)坐标系，如图 4－4 所示。

(2)洛书基矢的形成公式和特性方程

洛书基矢的形成公式，可从基元矩阵的线性组合(Linear Combination)原理推导如下：

$$A=\begin{vmatrix}4\\3\\8\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+8\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix};$$

$$B=\begin{vmatrix}9\\5\\1\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix};$$

$$C=\begin{vmatrix}2\\7\\6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$$

亦即其特性方程为：

$$\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\j\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4i+9j+2k\\3i+5j+7k\\8i+j+6k\end{bmatrix}$$

$$=A\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+B\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+C\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}。$$

基于矩阵关系，我们看到卡氏坐标系的操作矩阵(Operation Matrix)即众所周知的单元矩阵(Identity Matrix)：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

该矩阵只能定义已给定的矢量，不能使它有任何改变；而引用洛书矩阵之后，洛书坐标系的操作矩阵为洛书矩阵：

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

而由于洛书矩阵所特有的运转特性，它不仅可以改变其所定义的矢量的大小，而且能引起其性质的改变。

(3)洛书空间的矢量群

定理：洛书空间的任一矢量$[a, b, c]$是由 3 个基矢 $A=(4, 3, 8)'$；$B=(9, 5, 1)'$；$C=(2, 7, 6)'$线性组合而成。

证明：假定该线性组合方程为 $XA+YB+ZC$

我们有：

$$X\begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{vmatrix}+Y\begin{vmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix}+Z\begin{vmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

亦即：

$$4X+9Y+2Z=a$$
$$3X+5Y+7Z=b$$
$$8X+1Y+6Z=c$$

解联立方程组得

$$X=\frac{1}{360}[23a-52b+53c]$$

$$XA=\frac{1}{360}[23a-52b+53c]\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{360}[38a+8b-22c]$$

$$YB=\frac{1}{360}[38a+8b-22c]\begin{bmatrix}9\\5\\1\end{bmatrix}$$

$$Z=\frac{1}{360}[-37a+68b-7c]$$

$$ZC=\frac{1}{360}[-37a+68b-7c]\begin{bmatrix}2\\7\\6\end{bmatrix}$$

$$\therefore XA+YB+ZC=\frac{1}{360}\begin{bmatrix}23a-52b+53c\\38a+8b-22c\\-37a+68b-7c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{360}\begin{bmatrix}360\\360\\360\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

(4)从卡氏基系(Bases)到洛书基系的坐标转换

卡氏基系：

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\ e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};\ e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

洛书基系：

$$A=\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}9\\5\\1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}2\\7\\6\end{bmatrix}.$$

用同样的代数转换解联立方程的方法得

$$[e_1,\ e_2,\ e_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{360}\begin{bmatrix}23 & -52 & 53\\ 38 & 8 & -22\\ -37 & 68 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

(5)洛书矩阵与洛书逆矩阵

在三维的矢量空间中，卡氏基系(X_e)与洛书基系(X_a)之间的坐标转换是由两个矩阵来完成的。即：

(1)$X_a=PX_e$，式中 P 为洛书矩阵 $\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}$

(2)$X_e=QX_a$，式中 Q 为洛书逆矩阵：

$$\frac{1}{360}\begin{bmatrix}23 & -52 & 53\\ 38 & 8 & -22\\ -37 & 68 & -7\end{bmatrix}$$

很容易证明 $Q=P^{-1}$。此外，很有趣的是 Q 亦为一幻方，其中每一个三元数的数字之和均为 24。

(6)两种坐标相互转换的结论

从上述对卡氏坐标与洛书坐标的转换研究中，我们可以得到洛书矩阵在数学操作中产生的特殊效果。举例而言，洛书空间中的矢量[1，1，1]′对应于欧氏空间中的矢量为：

$$\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+9+2\\ 3+5+7\\ 8+1+6\end{bmatrix}=15\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=15[1\quad 1\quad 1]'$$

而欧氏空间中的矢量[1，1，1]′对应于洛书空间中的矢量为：

$$\frac{1}{360}\begin{bmatrix}23 & -52 & 53\\ 38 & 8 & -22\\ -37 & 68 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{360}\begin{bmatrix}23 & -52 & +53\\ 38 & +8 & -22\\ -37 & +68 & -7\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{360}\begin{bmatrix}24\\24\\24\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

由此可看出洛书矩阵的运转可导致矢量的膨胀或收缩(特质(五))。

2. 洛书坐标系中基矢的数量特性、几何特性及其不变量

设 A，B，C 为洛书矩阵中 3 列数字所分别代表的坐标点；A'，B'，C' 为 3 行数字所代表的坐标点。它们的坐标、位矢、矢长、方向余弦和其他不变量可用下列基本数学公式来计算。这里，我们主要列出基矢 A，B，C 的各种参量(A'，B'，C' 与之类似)。

(1)<u>基点及其坐标</u>(见图 4-1)：

$(A)=(4,3,8)\quad (B)=(9,5,1)\quad (C)=(2,7,6)$

$(A')=(4,9,2)\quad (B')=(3,5,7)\quad (C')=(8,1,6)$

(2)<u>基点的位矢及其分量：</u>

$OA=A=(4,3,8)\qquad OA'=A'=(4,9,2)$

$OB=B=(9,5,1)\qquad OB'=B'=(3,5,7)$

$OC=C=(2,7,6)\qquad OC'=C'=(8,1,6)$

(3)<u>基矢的矢长(不变量)：</u>

$$|OA|=a=\sqrt{4^2+3^2+8^2}=\sqrt{89}$$
$$|OA'|=a'=\sqrt{4^2+9^2+2^2}=\sqrt{101}$$
$$|OB|=b=\sqrt{9^2+5^2+1^2}=\sqrt{107}$$
$$|OB'|=b'=\sqrt{3^2+5^2+7^2}=\sqrt{83}$$
$$|OC|=c=\sqrt{2^2+7^2+6^2}=\sqrt{89}$$
$$|OC'|=c'=\sqrt{8^2+1^2+6^2}=\sqrt{101}$$

(4)基矢与坐标轴之间的夹角 α、β、γ 的方向余弦：

	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
A	$4/\sqrt{89}$	$3/\sqrt{89}$	$8/\sqrt{89}$
B	$9/\sqrt{107}$	$5/\sqrt{107}$	$1/\sqrt{107}$
C	$2/\sqrt{89}$	$7/\sqrt{89}$	$6/\sqrt{89}$

(5)基矢的数性积(不变量)：

$$A\cdot B=(4,3,8)\cdot(9,5,1)=36+15+8=59$$
$$B\cdot C=(9,5,1)\cdot(2,7,6)=18+35+6=59$$
$$C\cdot A=(2,7,6)\cdot(4,3,8)=8+21+48=77$$

(6)基矢的矢性积：

$$\begin{aligned}A\times B&=(4i+3j+8k)\times(9i+5j+k)\\&=-37i+68j-7k\\&=-(B\times A)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}B\times C&=(9i+5j+k)\times(2i+7j+6k)\\&=23i-52j+53k\\&=-(C\times B)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}C\times A&=(2i+7j+6k)\times(4i+3j+8k)\\&=38i+8j-22k\\&=-(A\times C)\end{aligned}$$

(7)基矢间的夹角(不变量)：

$$\cos AOB=59/\sqrt{89}\sqrt{107}=0.6051$$
$$\angle AOB=52.8^\circ$$
$$\cos BOC=59/\sqrt{107}\sqrt{89}=0.6051$$
$$\angle BOC=52.8^\circ$$

$$\cos AOC = 77/\sqrt{89}\sqrt{89} = 0.8652$$

$$\angle AOC = 30.2°$$

3. 洛书空间的点格(Point Lattice)

(1)洛书几何学中的点线面体网络结构

在基础几何学中，三维空间是以点线面体来描绘的，其中以点作为空间的单元。在某一已给定的线性直角坐标系或斜坐标系中的整数点的集成(*Integral*)，即空间格(*Space Lattice*)。在图 4-5 中列出了洛书几何学中的点线面体网络结构。根据这一图解，可以了解洛书数字怎样成为点、线、面、体几何图形，以及它们的一些其他方面的物理涵义。

(2)洛书的三角形平面

洛书的三角形平面如图 4-5(c)所示。平面的普遍方程为 $Ax+By+Cz+D=0$。在本文后面的定理中将证明该方程的解为 $x+y+z=15$，亦即平面上每一点的坐标(x，y，z)之和为 15；从原点到三角形各顶点的距离也均为 15。此外，又可解出该平面的截点方程为：

$$\frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{15}=1$$

该方程明确显示了洛书平面的特点，并对洛书图阵中每一组三元数之和均为 15，作了几何学上的表达和解释。

(3)洛书平行六面体

洛书平行六面体如图(4-5(d))所示。它由矢量 OA、OB、OC(基矢)组成其三根轴，由基矢的平行线及基矢的和构成其棱与对角线。洛书平行六面体的体积可由三个基矢的标矢积来得到。即 $V=A\cdot(B\times C)$。洛书平行六面体是十分令人感兴趣的，它的其

他特点将在以后叙述。

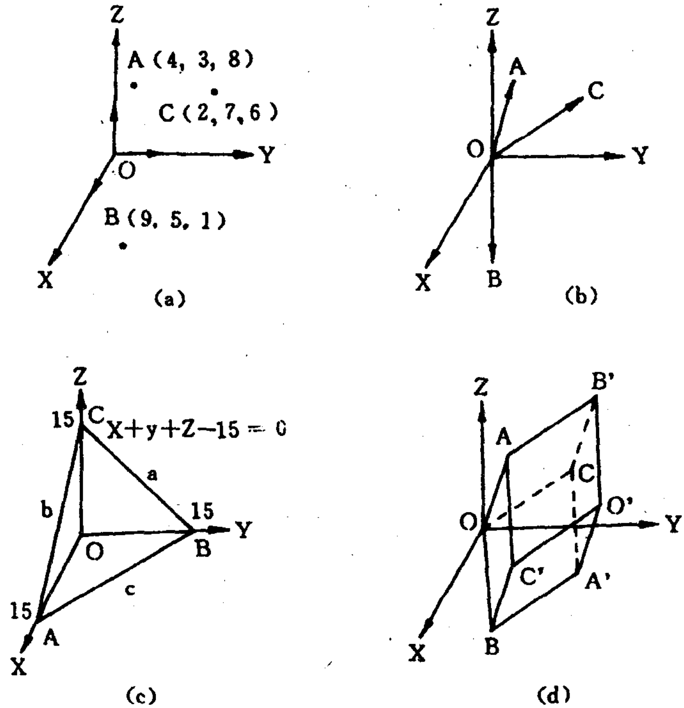


图 4-5　洛书几何学中的点线面体网络

(4)<u>洛书空间的几何结构总论</u>

根据作者的研究结果，洛书空间的几何外形是由运转中的洛书矩阵本身的代数结构所决定的。当洛书矩阵取其自然形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

时，它产生一个初始的几何外形，其体积为零单位；当采取其本

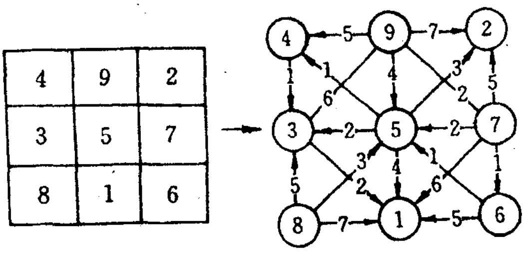
体形式如图 4-3(a)所示时，它产生一个稳定的几何外形，其体积为 360 单位。

这样，洛书空间的几何外形将随着运转中的洛书矩阵的结构变化而不停地转变，因而洛书空间为一周期性的运转空间(符合于前文的特质(五)及(七))。

4. 洛书几何学中的数字标量场、梯度和矢量场

(1)洛书平面场几何学

将洛书图阵视作为平面图形，图 4-6(a)为洛书的数字标量场，显示了不同位置上的数字分布情况。根据数字间的线密度(Line Density)这一概念，引出如图 4－6(b)所示的梯度矢量场。图中梯度矢量的方向用箭头表示，大小则用引线上的数字来表示。更有意义的是上述的梯度矢量场可以演示矢量加法的三角形定理。再进一步，可以发现图 4-6(b)所示的矢量场也显示了均质、对称和平衡等特性(洛书空间的特质(六))。这正是洛书"场几何学"(Field Geometry)的精义之一，也是洛书矩阵的独特性质之一。



(a)洛书的数字标量场　　　(b)洛书梯度矢量场

图 4-6　由洛书图阵形成矢量场

研究洛书梯度矢量场的“流动”性质，又可得到洛书的“源场”与“汇场”，如图 4-7 所示。

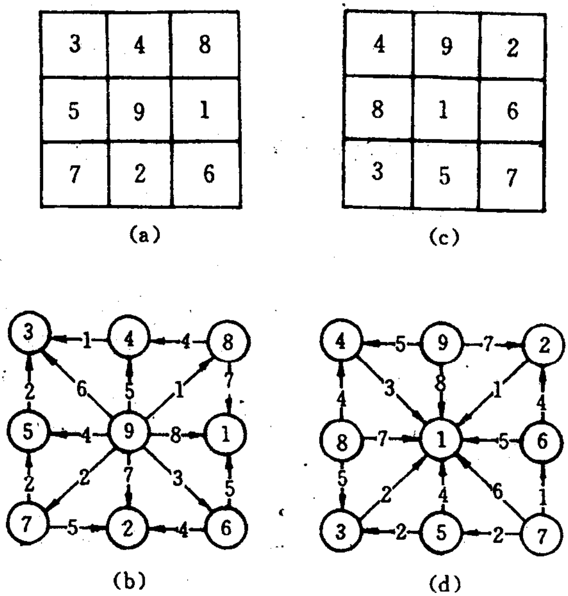


图 4-7　由洛书图阵形成的源场与汇场

(a)、(c)洛书的数字标量场　(b)洛书源场　(d)洛书汇场

用 9 作为洛书的中心数字(图 4-7(a))，这样得出的矢量场具有从中心流向一切其他点的性质，这就是洛书源场(图 4-7(b))，中心点成为点源。依次类推，用 1 作为中心数字(图 4-7(c))，得出的矢量场具有向中心点汇集的性质，就是汇场(图 4-7(d))，中心点即点汇。

建立于数字线密度基础上的洛书平面场将是一种统一场。它不仅是洛书空间的一种几何形式，也将为演示物理世界中的各种

场提供新的数学基础。

(2)洛书几何学的空间矢量场

将洛书矩阵看作为均质条件下的应力矩阵。图 4-8 为三维应力矩阵与洛书矩阵的对照。由对比关系得下式：

$$
\text{洛书矩阵}=\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}=\text{应力矩阵}
$$

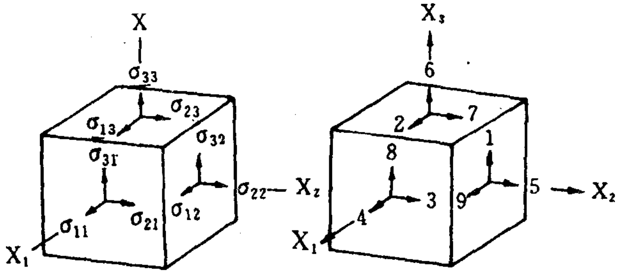


图 4-8 洛书图阵与应力矩阵

这里可再度得到这样一个结论：洛书空间矢量场可以完善地说明物理现象中的均质性、对称性和平衡性。

众所周知，应力矩阵为一个二级张量，洛书矩阵也可被看作为二级张量，并有可能用来表示诸如应力、应变、热传导、导电性等多种物理性质。

5. 洛书几何学中的标量积空间(Scalar Product Space)

数学中二矢量 α 与 β 的标量积公式为：

$$\alpha\cdot\beta=\alpha_x\beta_x+\alpha_y\beta_y+\alpha_z\beta_z=|\alpha|\cdot|\beta|\cos\theta$$

将此式应用于洛书空间的六个基矢(A, B, C, A', B', C')

可得到洛书几何学中标量空间的若干特性。

(1)平行性

基矢间的平行性有下列两种情况：

情况 I：两基矢 α 与 β 的平行性可由 α、β 与第三基矢 γ 之间的内夹角相等来证明。其条件为：

如 $|\alpha|=|\beta|$；$\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$

则 $\alpha /\!/ \beta$。

情况 II：两对基矢间的平行性可由该 4 个基矢 α，β，γ，δ 组成一平行四边形来证明。其条件为：

如 $|\alpha|=|\gamma|$；$|\beta|=|\delta|$；$\alpha\cdot\beta=\gamma\cdot\delta$

则 $\alpha /\!/ \gamma$；$\beta /\!/ \delta$。

(2)平行六面体形成特性

已知洛书平行六面体的体积为 3 个基矢的标矢积(Scalar Triple Product)(亦即洛书矩阵的行列式值 D)。根据这一特性，作者发现洛书基矢的标量积与矢量积之间有下列关系：

定理 I：如果两对基矢有相等的标量积，则矢量积的矢长相等。

如 $\alpha\cdot\beta=\gamma\cdot\delta$

则 $|\alpha\times\beta|=|\gamma\times\delta|$

例如：$A\cdot B'=(4, 3, 8)\cdot(3, 5, 7)=83$

$C\cdot B'=(2, 7, 6)\cdot(3, 5, 7)=83$

则 $|A\times B'|=|C\times B'|=\sqrt{498}$

定理 II：在洛书空间中，任何用 3 个基矢构成的平行六面体的体积均为 90 的倍数。亦即 $|D|=n\left(\frac{\pi}{2}\right)$；$n=0, 1, 2\cdots\cdots6$。此一特性意味着洛书空间以 $n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 为值域(Range)的量子化。示例如下：

$$\begin{vmatrix} 2&7&6\\4&3&8\\3&5&7 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2&7&6\\3&5&7\\8&1&6 \end{vmatrix}=90,\quad \begin{vmatrix} 3&5&7\\4&3&8\\9&5&1 \end{vmatrix}=180,$$

$$\begin{vmatrix} 4&3&8\\8&1&6\\9&5&1 \end{vmatrix}=270,\quad \begin{vmatrix} 3&5&7\\8&1&6\\9&5&1 \end{vmatrix}=360,\quad \begin{vmatrix} 2&7&6\\8&1&6\\9&5&1 \end{vmatrix}=450,$$

$$\begin{vmatrix} 2&7&6\\3&5&7\\9&5&1 \end{vmatrix}=540(=6\times 90)。$$

(3)用6个基矢的实际数值演示洛书几何学中标量积空间的特征

6个基矢的矢长示于本文四 2*c* 段，其空间位置示于图 4-9。我们看到，没有任何3个基矢是在同一平面内的。

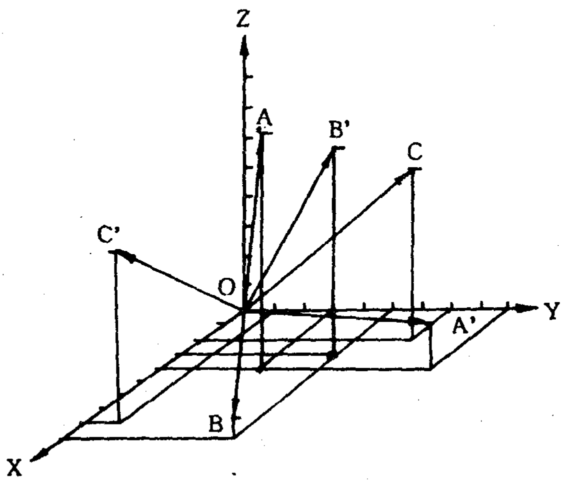


图 4-9 基矢的空间位置

由于交换律适用于标量积，因而6个基矢共有 $6\times 5/2=15$ 种组合。这15种标量积空间的特征列于表 4-2：

表 4—2 洛书几何学中标量积空间的特征

组合编号	矢量 α	矢量 β	$\alpha\cdot\beta$	$\cos\theta$	平行情况	$\alpha\times\beta$	$\lvert\alpha\times\beta\rvert$	平行六面体
1	A(4,3,8)	B′(3,5,7)	83	$83/\sqrt{89}\sqrt{83}$	I	(−19,−4,11)	$\sqrt{498}$	A·(A×B′)=90
2	C(2,7,6)	B′(3,5,7)	83			(19,4,−11)		A′·(C×B′)=90
3	A′(4,9,2)	B(9,5,1)	83	$83/\sqrt{101}\sqrt{107}$	I	(−1,14,−61)	$\sqrt{2116}$	B′·(A′×B)=360
4	C′(8,1,6)	B(9,5,1)	83			(−29,46,31)		B′·(C′×B)=360
5	C(2,7,6)	A′(4,9,2)	83	$83/\sqrt{89}\sqrt{101}$	II	(−40,20,−10)	$\sqrt{2100}$	B′·(C×A′)=90
6	A(4,3,8)	C′(8,1,6)	83			(10,40,−20)		B′·(A×C′)=90
7	B′(3,5,7)	B(9,5,1)	59	$59/\sqrt{83}\sqrt{107}$	0	(−30,60,−30)	$\sqrt{5400}$	C′·(B′×B)=360
8	A(4,3,8)	A′(4,9,2)	59	$59/\sqrt{89}\sqrt{101}$	II	(−66,24,24)	$\sqrt{5508}$	B·(A×A′)=450
9	C(2,7,6)	C′(8,1,6)	59			(36,36,−54)		B·(C×C′)=450
10	C(2,7,6)	B(9,5,1)	59	$59/\sqrt{89}\sqrt{107}$	I	(−23,52,−53)	$\sqrt{6042}$	A′·(C×B)=270
11	A(4,3,8)	B(9,5,1)	59			(−37,68,−7)		C′·(A×B)=270
12	B′(3,5,7)	A′(4,9,2)	71	$71/\sqrt{83}\sqrt{101}$	I	(−53,22,7)	$\sqrt{3342}$	B·(B′×A′)=360
13	B′(3,5,7)	C′(8,1,6)	71			(23,38,−37)		B·(B′×C′)=360
14	C(2,7,6)	A(4,3,8)	77	77/89	0	(38,8,−22)	$\sqrt{1992}$	A′·(C×A)=180
15	A′(4,9,2)	C′(8,1,6)	53	53/101	0	(52,−8,−68)	$\sqrt{7392}$	C·(A×C′)=360

本表示出在洛书空间内，平行六面体体积遵照量子系数为：$\frac{2\pi}{n}$的规律显示量子化。

五、洛书几何学中若干基本定理示例

这里给出洛书几何学中基本定理 4 例，以说明洛书几何学的真实性。

定理 1 任何两个等矢长基矢的和与差(均为矢量)必定相互垂直(菱形定则)。

证：在洛书矩阵中，有一对行矢量和一对列矢量各符合于矢长相等的条件。令其中一对行矢量为 OP 与 OQ(图 4-10)

$$OP=(P_x,P_y,P_z)=(4,9,2)$$

$$OQ=(Q_x,Q_y,Q_z)=(8,1,6)$$

$$|OP|=\sqrt{4^2+9^2+2^2}=\sqrt{107}$$

$$|OQ|=\sqrt{8^2+1^2+6^2}=\sqrt{107}$$

$$\begin{aligned}QR&=OP+OQ\\&=(4+8,\ 9+1,\ 2+6)\\&=(12,\ 10,\ 8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QP&=OP-OQ\\&=(4-8,\ 9-1,\ 2-6)\\&=(-4,\ 8,\ -4)\end{aligned}$$

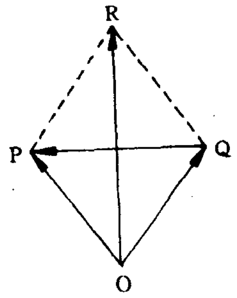


图 4-10 基矢的菱形定则

QR 与 QP 的标量积：

$$QR\cdot QP=(-4\times12+8\times10-4\times8)=0$$

$$\therefore\qquad OR\perp QP$$

同样，可以用另一对等矢长的列矢量 $OP=(4,\ 3,\ 8)$与 $OQ=(2,\ 7,\ 6)$来证明上述定理。

定理 2 在三维(R^3)洛书空间中，给定 3 个非共线也非共面(且均非零矢)的点基矢 A，B，C。如果以 A 与 B 为两个基点，以形成一个平面次空间，在该平面中 AB 为一直线矢量，则点矢 C 的方向垂直于 AB。

证：在洛书空间中，取 3 个列矢量，其坐标点分别为 $A=(4,3,8)$；$B=(2,7,6)$；$C=(9,5,1)$，如图 4-11。

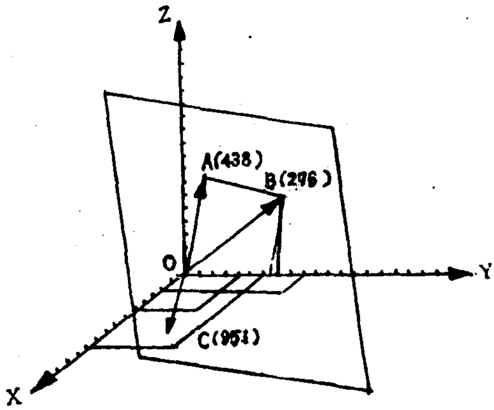


图 4-11 定理 2 的证明

A，B 与 C 为非共线矢量亦非共面矢量。A 与 B 为两个等矢长基矢，因而可以被用作为基点以形成一平面次空间，在该平面内 AB 为一直线矢量。

AB 矢量：$AB=B-A=(2,7,6)-(4,3,8)=(-2,4,-2)$

$\because$ $C\cdot AB=(9,5,1)\cdot(-2,4,-2)=9(-2)+4\times5+1(-2)=0$

$\therefore$ C 为 AB 的垂直方向矢。$C\perp AB$。

同样，我们亦可用 3 个行矢量 $A=(4,9,2)$；$B=(8,1,6)$；$C=(3,5,7)$来证明上述定理。

定理 3 洛书矩阵为洛书空间中的平面的标准方程 $AX+BY$

$+CZ+D=0$ 的一种表达方式。

式中 A，B，C 为系数，D 为从原点到该平面的垂直距离。

证：将洛书矩阵中的三行数字看作为空间中的 3 个点：$p=(4, 9, 2)$；$q=(3, 5, 7)$；$r=(8, 1, 6)$，由于三点决定一平面，因而这 3 个点当在满足下列联立方程式的平面之内：

$$\begin{cases}4A+9B+2C+D=0\\3A+5B+7C+D=0\\8A+B+6C+D=0\end{cases} \tag{1}$$

将上述联立方程的系数矩阵用“阶梯法”求解得：

$$\begin{cases}A+9/4B+1/2C+1/4D=0\\-B+22/7C+1/7D=0\\-360/C-24D=0\end{cases}$$

取整数解得：

$$A=1；B=1；C=1；D=-15$$

得上述平面方程为：$X+Y+Z-15=0$

即本章四 3(2)中所述的洛书三角形平面方程。

定理 4 所有的 3×3 阶幻方在实数域内构成一矢量空间。

证：令 M 为所有 3×3 幻方集合，并假定：

$$A=[a_{ij}]\in M；B=[b_{ij}]\in M \tag{1}$$

加法操作可定义为：

$$a_{ij}+b_{ij}=(a+b)_{ij}(i, j=1, 2, 3) \tag{2}$$

从(2)式可得出结论：两个幻方之和亦为一幻方，于是 M 在加法操作的情况下是封闭的。由于实数在加法运算时服从于交换律和结合律，所以在 M 集合中，加法也是可以交换和结合的。

如：
$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C) \tag{3}$$

各元素(Element)均为 1 的矩阵也是一幻方。各元素均为零

的矩阵 0=0 亦即 M 集合中的零元素。

$$A+0=A \tag{4}$$

矩阵
$$A=[a_{ij}] \tag{5}$$
的负矩阵为
$$-A=-[a_{ij}] \tag{6}$$

注意此处由于 A 是一幻方，$-A$ 亦为一幻方，且

$$A+(-A)=0 \tag{7}$$

A 与实数相乘可定义为

$$\alpha A=[\alpha a_{ij}]$$

式中在标量乘之后 M 仍是闭合的，由此得

$$(A\in M,\ \alpha\in R)\Rightarrow(\alpha A\in M) \tag{8}$$

如果 A 为一幻方，α 为一实数，于是 αA 亦为一幻方。根据实数的性质，我们有：

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\beta)A&=\alpha(\beta)A\\(\alpha+\beta)A&=\alpha A+\beta A\\\alpha(A+B)&=\alpha A+\alpha B\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中 A，$B\in M$；α，$\beta\in R$。所以 M 为一矢量空间得证。

结　　论

基于对洛书矩阵的数学研究，作者提出了焦氏《洛书几何学》。洛书几何学的主要内容为：洛书空间的构成，对洛书空间性质的描述以及洛书几何引论。

洛书空间被定义为一种数学空间，其矩阵结构可由洛书矩阵来表示。洛书空间的三种不同形态为：洛书数，洛书矩阵和洛书几何。将洛书数用坐标系数来表达时，它与解析几何之间的关系，恰好相当于将洛书数用符号运算时，它与代数函数之间的关系。如此，我们可从洛书矩阵开发为洛书代数学，也可开发为洛书几何学。

洛书空间的特点在于它的线性本质与它的双重性质：有限与无限，连续与不连续等。洛书空间是建筑在自然数的基础上，因而由它可以推导出其他的数字领域；它不是一成不变，而是重复地在膨胀与收缩；它又是一个以 $2\pi=360$ 度为周期的变化空间。最重要的是：它具有均质、对称、均衡和量子化等性质。

将洛书的三个数组作为坐标系统中的基点坐标，我们可以建立洛书空间的几何坐标系统，并从而确定洛书几何学中的点、线、面、体、网络。更有意义的是：通过对洛书矩阵中 9 个数字的代数运算，可以证明几何学中的一些基本公理和定理。

参 考 文 献

[1]Joseph Needham, "Science & Civilisation In China", Cambridge University Press, 1959, Vol. 3, pp. 55－140.

[2]Colin A. Ronan, "The Shorter Science & Civilisation In China", Cambridge University Press, 1980, Vol. 2, pp. 1－66.

[3]Tai Xiao－Hwa, "Chiao' s Six Years Research In Lo－Shu", Shanghai News of Science & Technology, April 26, 1986.

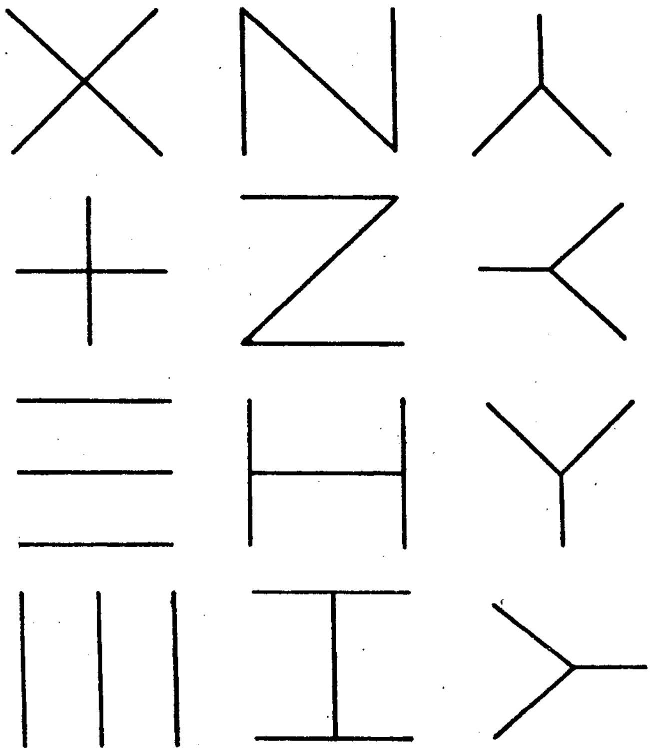
[4]Hui Wen－Kai, "The Explanation Of The Universe Space In Lo－Shu"(in Chinese), Shanghai Sin－Ming Evening News, April 24, 1986.

[5]Li Kai－Suing, "Elementary Treatment Of Mathematics In I－Ching", (in Chinese) Asian Cheng－Weng Publishing Corp., Taipei, Taiwan, 1982, pp. 207－247.

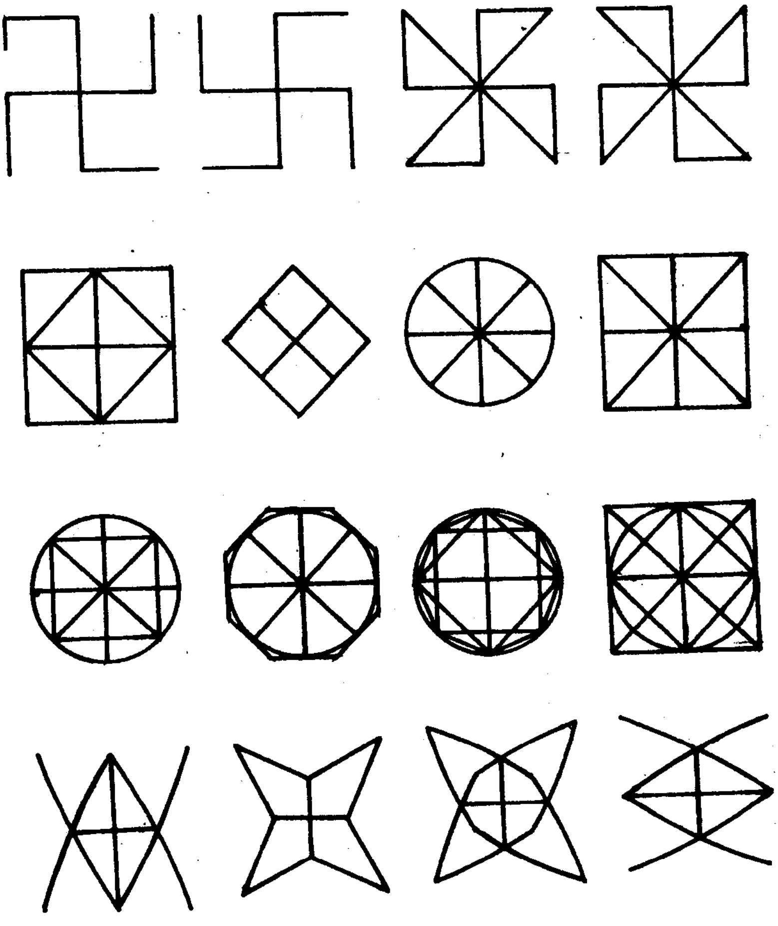
[6] R. S. Burlington, "Handbook of Mathematical Tables And Formulas", Handbook Publishers, Inc., Sandusky, Ohio, 1956.

[7]J. E. Nye, "Physical Properties of Crytals", The Clarendon Press, Oxford, 1957, pp, 82－92.

附录1　由洛书图阵作出的几何图形(1)



附录1 由洛书图阵作出的几何图形(2)



附录 2　中华民族原始文化的标识《洛书》

时间：1988 年 5 月 3 日至 10 日

对象：中国四川内江市数学会、科技界及新闻记者

题目：中华民族原始文化的标识《洛书》

（简介焦氏《洛书几何学》）

(Introduction to Chiao′s "Lo－shu Geometry")

在世界人类文化史中，直到今日，如果要推举出一个能够表示宇宙本质的数学模式的话，追溯全部数学史册，恐怕只有中华民族先民所创造的《洛书》可以当之无愧。洛书的创造，不是一个天才数学家的成就，而是全体民族的文化结晶，因为一个民族的原始数学的建立和发展，乃是文化传统和民族特质的综合结果。洛书的创造不只为中国的传统数学奠基，亦为中国的传统科技和文化开路。指南针、火药、造纸、印刷术为全人类造福，但我呼吁要以洛书冠首；唐诗、宋词、元曲、汉文章谱出人性的光华，但我呼吁全民族品读洛书，如果喊一句口号的话："不登长城非好汉，不识洛书非华人！"

在洛书的数学内含研究工作中，我的首期工作是研究洛书的定义、分类、形成、目的及转变 5 个基本命题，创立了焦氏"洛书矩阵"学说，已先后在国内发表。第二期工作是"洛书几何学"的研究。它的重要内容有下列各点：

（一）焦氏"洛书空间"的建立：洛书空间是由三大数学实质构成：①洛书数论；②洛书代数；③洛书几何。三者皆以自然数为基础，以加、减、乘、除为操作方法所构成。洛书空间的代表是洛书矩阵。

（二）焦氏"洛书空间"的特质：如果洛书空间能够描绘宇宙现象，它必须具备下列特质：

1. 空间内的元素符合线性关系式：$Y=mX+b$，空间形成的操作是加与数乘两种。

2. 洛书空间是无限的，但由生成操作可变为有限一定的。

3. 洛书空间是连续的，但是由生成操作可区分为互不连续的间隔。

4. 洛书空间内实中有虚，有理中有无理。

5. 洛书空间不是固定不变，而可无穷尽的涨缩。

6. 洛书空间是具备有均匀、对称和平衡三种性质。

7. 洛书空间具有量子化的特质。

（三）焦氏“洛书几何学”简介：

1. 欧氏几何轴系与洛书几何轴系。

2. 洛书几何的 3 个坐标轴。

3. 洛书几何的点、线、面、体网络。

4. 洛书平面几何的标量场与向量场。

5. 洛书几何的数积空间。

6. 焦氏洛书几何基本定理举例。

第 5 章 《洛书》的数学研究之三
——焦氏《洛书数论》新解

笔者将洛书数论概括为两大部分：一为洛书数论的集合论；二为洛书数论的矩阵论。现将两者要点分述如下：

一、洛书数的集合论

1. 洛书数的置换(Permutation)

在数学中，数 1，2，3，…，n 的置换的研究为所有各类变换的研究提供了一个基础。一个 n 阶置换，$n=1, 2, \cdots, n$，是这些整数的一个有序集$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，其中这些整数 1，2，…，n 中的每一个正好出现一次，我们用

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ i_1 & i_2\cdots i_n\end{pmatrix}$$

或 $\sigma=(i_1 \quad i_2\cdots i_n)$表示置换 σ。由于 σ 是 1－1(one－one)且到上(onto)的，因而序列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$，是数 1，2，…，n 的一个排列，n 阶置换的排列数是 $n!$。例如 3 阶置换是：〈123〉，〈132〉，〈213〉，〈231〉，〈312〉，〈321〉，即 $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$。

一个任意的置换 $\sigma=\langle i_1, i_2, \cdots, i_n\rangle$其特点由它的反序数与它的符号或奇偶性来刻画。$\sigma$ 的一个反序是 1，2，…，n 中的整数的一个序偶(p, q)。虽然 $p>q$，但在 σ 中 p 却位于 q 前。我们用 $I\langle i_1, i_2, \cdots, i_n\rangle$表示 σ 的反序数。而 σ 的符号或奇偶性则用关系式

$\mathrm{sgn}\langle i_1, i_2, \cdots, i_n\rangle = (-1)^{I\langle i_1, i_2, \cdots, i_n\rangle}$的正负来决定。

$$\begin{cases} I \text{ 为奇数时} & \mathrm{sgn}\sigma = -1 \\ I \text{ 为偶数时} & \mathrm{sgn}\sigma = +1 \end{cases}$$

例如：$\langle 3, 1, 4, 2\rangle$的反序是$\langle 3, 1\rangle\langle 3, 2\rangle$与$\langle 4, 2\rangle$，所以 $I\langle 3, 1, 4, 2\rangle = 3$，而 $\mathrm{sign}\langle 3, 1, 4, 2\rangle = (-1)^3 = -1$，亦即它的奇偶性是奇的。

一个置换的集合可形成一个对称的变换群，如果该集合满足下列 3 个重要性质：

(1)恒等置换属于该集合；

(2)若一个置换 A 属于该集合，它的逆置换 A^{-1}也属于该集合；

(3)属于该集合的两个置换之积也属于该集合。

为了研究置换群，吾人可将置换表示为被称为循环(cycle)的一些乘积的形式。由定义，符号$(m_1, m_2, \cdots m_k)$表示将 m_1 换为 m_2，m_2 换为 m_3，…，m_{k-1}换为 m_k，而 m_k 仍换为 m_1 且保留该集合中所有其余元素不变的置换。例如，若我们研究数 1，2，3，4，5 的置换，则

$$(1, 2, 3, 4, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \ (3, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

形式如同$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$的置换称为长度 k 的一个循环或一个圈，而 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 称为该圈的元素。单位置换可写作长度为 1 的圈$(1)=(2)=\cdots$。长度为 2 的圈称为对换。当我们按循环的顺序改变圈的元素时，我们得到同样的置换，例如：

$(1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2)$，$(5, 6) = (6, 5)$。

循环在置换论中的重要性可用定理说明如下：每个置换可表示为没有公共元素的一些不相交循环的乘积形式，如不计较因子的顺序时，则这种表示是唯一的。它的证明可由这种表示的方法

示出。例如我们想分解置换 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&3&2&1\end{pmatrix}$。我们看到 A 将 1→4，4→3，3→6，且 6→1。结果我们有第一个因子(1，4，3，6)。关于剩下的数我们研究 2 并注意到 A 将 2→5，5→2，所以第二个因子是(2，5)。由于现在所有数都已表出，我们有：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&3&2&1\end{pmatrix}=$(1，4，3，6)(2，5)。在几乎所有情况内，吾人只需通过检查，就可将一个置换集进行因子分解，称为循环因子分解。得出它的不相交的循环因子。

现在让我们将置换运算应用于洛书数集 $L_9=\{1，2，3，4，5，6，7，8，9\}$，并用 S_9 表示 L_9 的所有置换的集合。S_9 的排列数＝1，2.…. 9＝362，880。根据洛书矩阵论，群 S_9 可分为 4 个子群：(Ⅰ)洛书本体；(Ⅱ)洛书变体；(Ⅲ)自然洛书；(Ⅳ)杂体洛书。S_9 的特征性质说明如下：

(1)<u>从自然洛书到洛书本体的置换</u>

在群 S_9 中，自然洛书取作由 $E=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}$ 表示的恒等置换。让我们用 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&9&2&3&5&7&8&1&6\end{pmatrix}$ 表示从自然洛书到洛书本体的置换，因而 A 的逆置换由 $A^{-1}=\begin{pmatrix}4&9&2&3&5&7&8&1&6\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\8&3&4&1&5&9&6&7&2\end{pmatrix}$ 给出，从而我们直接得到关系式：

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&9&2&3&5&7&8&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2&3&5&7&8&1&6\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}=E$$ 或 $$A^{-1}A=\begin{pmatrix}4&9&2&3&5&7&8&1&6\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&9&2&3&5&7&8&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9&2&3&5&7&8&1&6\\4&9&2&3&5&7&8&1&6\end{pmatrix}=E$$

让我们用$L_P=\langle 4,9,2,3,5,7,8,1,6\rangle$表示洛书本体的置换，它的反序数$I\langle 4,9,2,3,5,7,8,1,6\rangle=17$。因而它的符号是$-1$，在置换$A$中我们看出$A$将$1\to4$，$4\to3$，$3\to2$，$2\to9$，$9\to6$，$6\to7$，$7\to8$，$8\to1$且$5\to5$。因此洛书本体置换可表示为两个循环因子(1，4，3，2，9，6，7，8)与(5)之积。

(2)S_9的特征性质

我们取洛书本体为群A，洛书变体为群B，自然洛书为群C，而杂体洛书为群D。S_9的4个子群的某些置换的特征性质列为表5-1：

表5-1 S_9的特征性质

群	置　　换	符　号	循　环　因　子
恒等元	⟨1 2 3 4 5 6 7 8 9⟩	+	
A	⟨2 9 4 7 5 3 6 1 8⟩ ⟨6 1 8 7 5 3 2 9 4⟩	+ −	{1，2，9，8}{4，3，7，6}{5} {1，6，3，8，4，7，9，2}{5}
B	⟨1 8 6 9 4 2 5 3 7⟩ ⟨4 9 2 8 1 6 3 5 7⟩	+ −	{1}{2，8，3，6}{4，9，7，5} {1，4，8，5}{2，9，7，3}{6}
C	⟨2 3 1 5 6 4 8 9 7⟩ ⟨1 4 7 2 5 8 3 6 9⟩	+ −	{1，2，3}{4，5，6}{7，8，9} {1}{2，4}{3，7}{5}{6，8}{9}
D	⟨1 8 9 2 7 4 3 6 5⟩ ⟨4 7 8 9 1 3 2 5 6⟩	+ −	{1}{2，8，6，4}{3，9，5，7} {1，4，9，6，3，8，5}{2，7}

(3)S_9的置换的乘法

置换的乘法是由一给定的置换形成新置换的程序，如我们将某置换A施加于S_9的任一元素x，然后再将置换B施加于新元素xA得$(xA)B$。如果将x直接置换成$(xA)B$的置换称为A与B的乘积AB，根据定义我们有$x(AB)=(xA)B$。置换的乘法与数的乘法有某些类似，但必须注意，在数的乘法中交换律与结合律都是真的，而置换乘法则服从于结合律而不服从交换律，因为置换乘法与因子顺序有关，$x(AB)\neq x(BA)$。

2. 洛书数的整除(Aliquot)性

为了研究数的整除性，我们要知道一个数的约数以及一个数集的最大公约数(g, c, d)与最小公倍数(l, c, m)。用符号 $d=(a, b)$表示 a，b 两数的 g, c, d；符号 $m=[a, b]$表示 a 与 b 的 $l. c. m$。a 与 b 的任意公倍数能被它们的 $l. c. m$ 整除，即$[ma, mb]=m[a, b]$。关于两数 a 与 b 与 $d=(a, b)$，它们的 $l. c. m$ 由下公式给出：$[a, b]=\frac{ab}{d}$。这个公式可视为对 $l. c. m$ 与 $g. c. d$ 对称地写为公式：$[a, b](a, b)=ab$。根据形成 $g. c. d$ 与 $l. c. m$ 的运算为基础，我们可为洛书数集引出下述集论基础。

(1)洛书数集的最大公约数与最小公倍数

两个数的 $g. c. d$ 与 $l. c. m$ 的上述定义与运算可同时推广到数集。让我们首先研究 3 个数 a, b, c 的情况。明显地 $d=(a, b, c)=((a, b), c)=(a, (b, c))$。这个规则称为 $g. c. d$ 的结合律，类似地我们有 $l. c. m$ 的结合律，即 $m=[a, b, c]=[[a, b], c]=[a, [b, c]]$。对任意的数集$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$我们可类似地由 $d_n=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$定义 $g. c. d$ 和由 $m_n=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$定义 $l. c. m$，而这引导我们对一般的任意数集逐步地计算 d_n 与 m_n。因而对洛书数集 $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$我们可写出这些数的素因子分解式如 $L=\{1, 2, 3, 2^2, 5, 2\cdot 3, 7, 2^3, 3^2\}$。$L$ 的 $g\cdot c\cdot d$ 仅可能是 $d=(1, 2^3, 3^2, 5, 7)$，它们极小值可以用 $\min(L)=1$ 表示。因此集合 L 的 $g. c. d$ 等于 $d=(L)=\min(L)=1$，这表明集合是一个互素的集合，即除 1 外没有其他公因子。L 的 $l. c. m$ 是能被 L 的每个数整除的最小正整数，我们用 $m=[1, 2, 3, 2^2, 5, 2\cdot 3, 7, 2^3, 3^2]$表示它，它们的极大值可以用 $\max[L]=[2^3, 3^2, 5, 7]=[8, 9, 5, 7]$表示。因而 L 的 $l. c. m$ 等于 $m(L)=\max[L]=8\cdot 9\cdot 5\cdot 7=360\cdot 7=2520$。从几何上说，若我们取

360 作为绕一圆旋转一周的值，则洛书数的 $l.c.m$ 包含 7 周，或曰数 7 是旋转的周数。

(2)<u>洛书数的 $g.c.d$ 与 $l.c.m$ 的集合论</u>

以上例为基础，我们看出形成 $g.c.d$ 与 $l.c.m$ 的两个运算类似于由数的普通加法与乘法而产生新数。所有这些运算满足集合论的某些简单规律。而且，在运算 $d=(a, b)$ 与 $m=[a, b]$ 中，当数 a 与 b 分别按照分解式 $a=\prod_i P_i^{\alpha_i}$ 与 $b=\prod_i P_i^{\beta_i}$ 时，它们的 $g.c.d$ 与 $l.c.m$ 分别由 $(a, b)=\prod_i P_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ 与 $[a, b]=\prod_i P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$ 来计算，因此 d 与 m 的两个运算变成了两个数 α 与 β 的极小值与极大值的运算。更意味深长的是，如果我们引进两个集运算算子 $\cup$(并)与 $\cap$(交)，从而建立关系式：$d=(a, b)=a\cap b$，与 $m=[a, b]=a\cup b$。我们概括出 3 个相似的运算系统：

(i)$d=(a, b)$，$m=[a, b]$；

(ii)$d=\min(\alpha, \beta)$，$m=\max[\alpha, \beta]$；

(iii)$\alpha=a\cap b$，$m=a\cup b$。

所有这些运算系统满足下述集论的简单规律：

①幂等律

(i)$(a, a)=a$，$[a, a]=a$

(ii)$\min(\alpha, \alpha)=\alpha$，$\max[\alpha, \alpha]=\alpha$

(iii)$a\cap a=a$，$a\cup a=a$

②交换律：

(i)$(a, b)=(b, a)$，$[a, b]=[b, a]$

(ii)$\min(\alpha, \beta)=\min(\beta, \alpha)$，$\max[\alpha, \beta]=\max[\beta, \alpha]$

(iii)$a\cap b=b\cap a$，$a\cup b=b\cup a$

③结合律：

(i)$((a, b), c)=(a, (b, c))$，$[[a, b], c]=[a, [b, c]]$

(ii)$\min\{\min(\alpha, \beta), \gamma\}=\min\{\alpha, \min\{\beta, \gamma\}\}$

$\max\{\max[\alpha, \beta], \gamma\} = \max\{\alpha, \max(\beta, \gamma)\}$

(iii) $a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c$，$a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c$

④吸收律：

(i) $[a,(a,b)]=a$，$(a,[a,b])=a$

(ii) $\max\{\alpha, \min(\alpha, \beta)\}=\alpha$，$\min\{\alpha, \max(\alpha, \beta)\}=\alpha$

(iii) $a\cup(a\cap b)=a$，$a\cap(a\cup b)=a$

我们现在可对每个系统中的两个运算的 4 个性质稍加解释。首要之点是这两个运算是二重性的，即当这两个运算处处交换时，这些性质仍同样成立。

(3)数 360 的整除性

在洛书数论中我们常将 360 作为一个泛常数，这是根据两大理由：(i)洛书矩阵的行列式值是 360，而(ii)洛书数集的 $l.c.m$ 是 7×360，所 以 360 的约数同洛书数的多种算术运算是相关的。

根据算术基本定理，每个整数可唯一地表示为素因子之积，即 $N=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$，其中 P_i 是素因子，而 α_i 是重数，即 P_i 在素因子分解式中出现的次数。N 的约数的个数由公式 $\nu(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$给出。因而我们有 $360=2^3\cdot3^2\cdot5$，而 $\nu(360)=(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)=24$。360 的 24 个约数是 1，2，3，4，5，6，8，9，10，12，15，18，20，24，30，36，40，45，60，72，90，120，180，360。

我们现在应用一个数的约数的平均值，可计算出一些其他数量的关系式，写出如下：

①N 的所有约数之积由 $\mathrm{I}\,d=N^{\frac{1}{2}V(N)}$给出，对 $N=360$ 我们有 $\mathrm{I}\,d=360^{12}$。

②n 个正整数的集合$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的几何平均值定义为 $G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$。当我们应用于 N 的 $V(N)$个数的积时，我们由 $G(N)=\sqrt{N}$，得出 N 的约数的几何平均值，对 $N=360$，我们有 G

$(360)=\sqrt{360}=18.97367$。

③具有素因子分解式 $N=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_n^{\alpha_n}$ 的 N 的诸约数之和 $S(N)$，由公式

$S(N)=[(P_1^{\alpha_1+1}-1)/(P_1-1)][(P_2^{\alpha_2+1}-1)/(P_2-1)]\cdots[(p_n^{\alpha_n+1}-1)/(P_n-1)]$

确定。当 $N=360$ 时，

$$S(360)=[(2^4-1)/(2-1)][(3^3-1)/(3-1)][(5^2-1)/(5-1)]$$
$$=(2^4-1)(3^2+3+1)(5+1)=1170$$

④N 的诸约数的算术平均值 $A(N)$，可由它们的和 $S(N)$除以它们的个数 $\nu(N)$得出。从而 $A(N)=S(N)/\nu(N)$。对 $N=360$，$A(360)=1170/24=48\frac{3}{4}$。

⑤洛书数集$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的调和平均值 H 由 $1/H=1/n(1/x_1+1/x_2+\cdots+1/x_n)$来确定。亦等于公式：$1/H(N)=A(N)/N$。对 $N=360$，$H(360)=360\times 24/1170=96/13$。

⑥一个数的约数的调和平均值与算术平均值之积等于该数本身。即 $N=A(N)\cdot H(N)$。

由于约数的算术平均值大于几何平均值 $\sqrt{N}$，根据平均值的一般理论，我们有不等式 $A(N)\geqq G(N)\geqq H(N)$。

二、洛书数的矩阵论

1. 洛书作为线性变换的过渡矩阵(Transition Matrix)

设 V 与 W 是域 K 上的矢量空间，则变换 $T: V\rightarrow W$ 是从矢量空间 V 到矢量空间 W 的一个映射，而函数 F 如满足条件：(i) $F(v_1+v_2)=F(v_1)+F(v_2)$；(ii)$F(\alpha v_1)=\alpha F(v_1)$，$F(\beta v_2)=\beta F$

(v_2)，且$(v_1, v_2 \in V; \alpha, \beta \in K)$，则 $F: V \to W$ 为一线性变换。

根据上述的原则，我们阐明洛书矩阵作为一个线性操作的要义如下：

(1)洛书矩阵表示一个线性变换

根据定义，每个线性变换 $T: V \to W$，其中 V 与 W 是矢量空间，都有一个与它相关联的代表矩阵。代表变换 T 的矩阵是由 V 的基底矢量组成，其上受 T 作用。让我们首先建立矢量空间的基底变换的定义与定理。

定义：设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是 V 的一个基底，并设$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$是另一个基底，假设

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned} \quad \text{而} \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

则式内系数矩阵的转置矩阵 P 就称为由“旧”基底$\{e_i\}$到“新”基底$\{f_i\}$的过渡矩阵。

定理：设 P 是从矢量空间 V 内的一个基底$\{e_i\}$到另一个基底$\{f_i\}$的过渡矩阵，则对任意矢量 $v \in v$，我们有 $P[v]_f = [v]_e$，因此 $[v]_f = P^{-1}[v]_e$。

我们以 $\dim v = 3$(式中 $\dim V$ 为 V 的维数)的情况验证上述定理，并取之作洛书矩阵的形成规则。假设 P 是从 V 的一个基底$\{e_1, e_2, e_3\}$到的另一个基底$\{f_1, f_2, f_3\}$的过渡矩阵，

$$\text{譬如说：} \begin{aligned} f_1 &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ f_2 &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ f_3 &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned} \quad \text{所以 } P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

现在假定 $v \in V$，譬如说 $v = k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3$，则由上式代入 f_i，我们得：

$$v=k_1(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)+k_2(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3)+k_3(c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3)$$
$$=(a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3)e_1+(a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3)e_2+(a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3)e_3$$

因此，$[v]_f=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$　而$[v]_e=\begin{bmatrix}a_1k_1+b_1k_2+c_1k\\a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3\\a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3\end{bmatrix}$

所以　$P[V]_f=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3\\a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3\\a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3\end{bmatrix}=[v]_e$

再者，经过逆矩阵 P^{-1}，我们得出 $P^{-1}[V]_e=P^{-1}P[v]_f=I[v]_f=[v]_f$。

由上述定理为基础，我们推出洛书是 K 域上的一个 3×3 方阵，它是 K^3 上的一个线性算符。这里我们需要验证洛书是线性的。

洛书函数 $F: K^3\to K^3$ 由 $F(x, y, z)=(4x+9y+2z, 3x+5y+7z, 8x+y+6z)$给出。设 $v=(a, b, c)$，且 $w=(a', b', c')$，所以 $v+\omega=(a+a', b+b', c+c')$，而 $kv=(ka, kb, kc)$，$k\in K$，我们有 $F(v)=(4a+9b+2c, 3a+5b+7c, 8a+b+6c)$，而 $F(\omega)=(4a'+9b'+2c', 3a'+5b'+7c', 8a'+b'+6c')$。因此 $F(v+\omega)=F(a+a', b+b', c+c')=(4(a+a')+9(b+b')+2(c+c'), 3(a+a')+5(b+b')+7(c+c'), 8(a+a')+(b+b')+6(c+c'))=\{[(4a+9b+2c)+(4a'+9b'+2c')], [(3a+5b+7c)+(3a'+5b'+7c')], [(8a+b+6c)+(8a'+b'+6c')]\}=(4a+9b+2c, 3a+5b+7c, 8a+b+6c)+(4a'+9b'+2c', 3a'+5b'+7c', 8a'+b'+6c')=F(v)+F(\omega)$，且 $F(kv)=F(ka, kb, kc)=(4ka+9kb+2kc, 3ka+5kb+7kc, 8ka+kb+6kc)=[k(4a+9b+2c), k(3a+5b+7c), k(8a+b+6c)]=k(4a+9b+2c, 3a+5b+7c, 8a$

$+b+6c)=kF(v)$。

由于 v，ω 与 k 为任意的，因而 F 是线性的。

最后，正像每个线性变换可用一个矩阵表示一样，从而每个矩阵也表示成关于一个基底的某个线性变换。由 K^n 到 K^m 的一个线性变换，可用一个 $m\times n$ 矩阵表示。

(2)线性映射(Linear Mapping)的核(Kernel)与像(Image)

一个线性映射的两个重要概念，是它的像与核。我们首先给出它的定义与定理，然后用洛书矩阵来验证它们。

定义：(i)设 F：$V\to W$ 是一个线性映射，F 的像，记做 $\mathrm{Im}F$，是由 V 映射到 W 内的像点群，即 $\mathrm{Im}F=\{w\in W\}$，$F(v)=w$，$v\in V\}$。(ii)F 的核，记做 $\mathrm{Ker}F$，是 V 内映射到 $o\in W$ 的元素群，即 $\mathrm{Ker}F=\{v\in V$：$F(v)=0\}$。

定理：设 F：$V\to W$ 是一个线性映射，则 F 的像是 W 的一个子空间，它的核是 V 的一个子空间，且 $\dim V=\dim(\mathrm{Ker}F)+\dim(\mathrm{Im}F)$，式中 dim 表示维数。

我们通过由 T：$R^3\to R^3$ 与 $T(x,y,z)=(4x+9y+2z,3x+5y+7z,8x+y+6z)$定义的洛书映射，验证上述定理，我们需找出(i)$T$ 的像 $\mathrm{Im}T$，(ii)T 的核 $\mathrm{Ker}T$ 的基底与维数。

(i)由 R^3 生成元的像所产生的成 T 的像 $\mathrm{Im}T$：
$T(1,0,0)=(4,3,8)$，$T(0,1,0)=(9,5,1)$，$T(0,0,1)=(2,7,6)$形成各"行"为 $\mathrm{Im}T$ 的生成元的矩阵，并将"行"化简为阶梯形式：

$$\begin{bmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&8\\0&7/4&17\\0&11/2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&8\\0&7&68\\0&0&360\end{bmatrix}$$

因此$\{(4,3,8),(0,7,68),(0,0,360)\}$是 $\mathrm{Im}T$ 的一个基底，且 $\dim(\mathrm{Im}T)=3$。

(ii)我们探求使 $T(x,y,z)=(0,0,0)$的(x,y,z)的集合，

即 $T(x, y, z)=(4x+9y+2z, 3x+5y+7z, 8x+y+6z)=(0, 0, 0)$令对应的分量彼此相等，形成齐次方程组，它的解空间是 T 的核 $\mathrm{Ker}T$。

$$\begin{matrix} 4x+9y+2z=0 & & 4x+9y+2z=0 & & 4x+9y+2z=0 \\ 3x+5y+7z=0 & \text{或} & 7y-22z=0 & \text{或} & 7y-22z=0 \\ 8x+y+6z=0 & & 17y-2z=0 & & 180z=0 \end{matrix}$$

这个方程组的解集是$(x, y, z)=(0, 0, 0)$，零集。因此，$\{(0, 0, 0)\}$是 j $\mathrm{Ker}T$ 的仅有的唯一基底，所以 $\dim(\mathrm{Ker}T)=0$。我们看出 $\dim(\mathrm{Im}T)+\dim(\mathrm{Ker}T)=3+0=3$，这正是 T 的定义域 R^3 的维数。

(3)可逆算符(Invertible Operator)

一个线性算符 $T: V\to V$ 称为可逆的，如果它有一个逆算符，亦即当有 $T^{-1}\in A(V)$时，即得 $TT^{-1}=T^{-1}T=I$(I 是 V 上的恒等算符)。T 如果是，而且只有如果是"一一对应与本体的"，此时 T 方为可逆。

为了研究线性映射，我们定义一个线性映射 $F: U\to V$ 为同构(Isomorphism)，如果它是一一对应的 。矢量空间 V 与 U 称为同构的，如果存在 V 到 U 上的一个同构。一个线性映射由它对某一空间的基矢作用的效应所完全表征，或者我们把它说成一个定理：设$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$是 V 的一个基底，并设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 U 内的任意向量，则存在唯一的一个线性映射 $F: V\to U$，使 $F(v_1)=u_1$，$F(v_2)=u_2$，$\cdots$，$F(u_n)=u_n$。我们强调这个定理是应用于线性映射的基本运算，而且矢量 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 完全是任意的，也可能是线性相关的，甚至可能是彼此相等的。

为了构造可逆算符，我们必须知道线性映射是否是奇异的(singular)或非奇异的(nonsingular)。一个线性映射 $F: V\to U$ 称为是奇异的，如果某个非零矢量在 F 下的像是 0；即如果存在 $v\in$

V，$v\neq 0$，而 $F(v)=0$。仅当 $0\in V$ 映成 $0\in U$，或者等价地说，如果它的核仅由零矢量组成：$\mathrm{Ker}F=\{0\}$时，F：$V\to U$ 为非奇异的。

以映射的奇异性为基础，我们得到两个定理：

(i)一个线性映射 F：$V\to U$，并且仅当它是非奇异的时，它方为一个同构。

(ii)一个有限维矢量空间上的线性算符 T：$V\to V$，并且仅当它是非奇异的时，它方为可逆的。

由于洛书映射的核仅由零矢量组成，洛书矩阵是非奇异的，而且我们可求出它的可逆形式，并证明它是1－1(one－one)与到上(onto)的：

(i)求由 $T(x, y, z)=(4x+9y+2z, 3x+5y+7z, 8x+y+6z)$定义的洛书变换的逆变换。

解 一个线性变换可由它在 V 的基底矢量上的效应来完全确定，我们应用此事实到逆形式。R^3 的标准基底是 $B=\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$，$T(1, 0, 0)=(4, 3, 8)$，$T(0, 1, 0)=(9, 5, 1)$，$T(0, 0, 1)=(2, 7, 6)$，因此，在标准基底下同 T 相关的矩阵是：

$$A=\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}\quad R^3\text{ 的恒等矩阵是 } I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

为了求 A^{-1}，我们可以使用高斯方法。作增广矩阵$[A;I]$，并使用行的基本运算，使它变为$[I;A^{-1}]$，其中 I 是恒等矩阵。

$$[A;I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 9 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 23/360 & -52/360 & 53/360\\ 0 & 1 & 0 & 38/360 & 8/360 & -22/360\\ 0 & 0 & 1 & -37/360 & 68/360 & -7/360\end{array}\right]$$

所以，$A^{-1}=1/360\begin{bmatrix}23 & -52 & 53\\ 38 & 8 & -22\\ -37 & 68 & -7\end{bmatrix}$，且 $T^{-1}(x, y, z)=A^{-1}$

$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=1/360[23x-52y+53z, 38x+8y-22z, -37x+68y-7z]$，$T^{-1}(x, y, z)$即为逆变换。

我们留给读者证明 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。

(ii)证明洛书线性变换是一个同构。

解：洛书变换 $A(x, y, z)=(4x+9y+2z, 3x+5y+7z, 8x+y+6z)$称为一个同构，如果它是 1－1(one－one)的与到上(onto)的。

设$(u, v, w)\in R^3$ 是一个固定矢量，并设(u, v, w)是(x, y, z)在 A 下的像；所以(x, y, z)是(u, v, w)在 A^{-1}下的像。因此，$A(x, y, z)=(u, v, w)$，且 $A^{-1}(u, v, w)=(x, y, z)$。

我们有 $A(x, y, z)=(4x+9y+2z, 3x+5y+7z, 8x+y+6z)=(u, v, w)$，从而得方程组：

$$4x+9y+2z=u,\ 3x+5y+7z=v,\ 8x+y+6z=w \qquad (1)。$$

由矩阵通过 u，v 与 w，解出 x，y 与 z，我们得到：

$$\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} \text{即} \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=1/360\begin{bmatrix}23 & -52 & 53\\ 38 & 8 & -22\\ -37 & 68 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$$

因此，$x=(23u-52v+53w)/360$；$y=(38u+8v-22w)/360$；$z=(-37u+68v-7w)/360$。

由于(u, v, w)是任意选取的，且我们是通过(u, v, w)求(x, y, z)的解，这蕴涵 $A(x, y, z)$是到上(onto)的 。

为了证明 A 是 1－1(one－one)的，设(u', v', w')是(1)的另一个解，则$(u-u', v-v', w-w')$是方程组

$$4x+9y+2z=0,3x+5y+7z=0,\ 8x+y+6z=0 \tag{2}$$

的解。令 $u-u'=x$，$v-v'=y$，$w-w'=z$，我们得到方程组：

$$\begin{aligned}
&4(u-u')+9(v-v')+2(w-w')=0\\
&3(u-u')+5(v-v')+7(w-w')=0\\
&8(u-u')+(v-v')+6(w-w')=0
\end{aligned} \tag{3}$$

比较(1)与(3)，看出 $u-u'=0$，$v-v'=0$，与 $w-w'=0$. 所以 $u=u'$；$v=v'$；$w=w'$ 从而方程组(1)的解是唯一的，即 $A(x,y,z)$是 1－1(*one－one*)的。因此，$A(x,y,z)$是一个同构。

(4)<u>相似性变换(Similarity Transformation)</u>

在同洛书线性算符打交道时，我们研究了 R^3 空间的两个基底：一个是单元基底 $e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$，$e_3=(0,0,1)$，而另一个是洛书基底 $f_1=(4,9,2)$，$f_2=(3,5,7)$，$f_3=(8,1,6)$。洛书表示矢量空间 V 内从基底$\{e_i\}$到基底$\{f_i\}$的过渡矩阵 P。由于 P 是可逆的，从而对 V 上的任意线性算符 T，我们有$[T]_f=P^{-1}[T]_eP$。相应地，若 A 是 V 上的一个线性算符 T 的任意矩阵表示，则矩阵 $B=P^{-1}AP$ 也是 T 的一个矩阵表示，从而 B 称为相似于 A 或者称为由 A 通过相似性变换而得到 B。

矩阵的相似性是一个等价关系，因此两个矩阵 A 与 B 表示相同的线性算符 T，并且仅当它们彼此是相似的。即，线性算符 T 的所有矩阵表示形成一个相似矩阵等价类。这个原则应用于洛书矩阵。我们推得：洛书矩阵的所有 72 种形式组成一个相似矩阵的等价类。

2. 线性映射与线性方程组

线性映射的重要应用是解线性方程组。域 K 上的一个含 n 个未知数 m 个线性方程的方程组可以写成矩阵方程 $AX=B$，它的伴随齐次方程组用 $AX=0$ 表示。系数矩阵 A 可看作为 $B\in K$ 在

线性映射 $A: K^n \to K^m$ 下的原像(preimage)；而相伴齐次方程组 $AX=0$ 的解可看作做线性映射 $A: K^n \to K^m$ 的核。由关系式：$\dim(\ker A) = \dim K^n - \dim(\mathrm{Im} A) = n - \mathrm{rank} A$，我们推出方程组 $AX=0$ 的解空间 W 的维数是 $n-\gamma$，其中 n 是未知数的个数，而 γ 是系数矩阵 A 的秩。

一般地，研究方程个数与未知数个数相同的方程组，譬如说 $m=n$。这种方程组由 $AX=B$ 表示，其中 A 是一个 n 阶方阵。假设矩阵 A 是非奇异的，即相伴矩阵方程 $AX=0$ 仅有零解，则线性映射 A 是 1－1(one-one)的与到上(onto)的，这意味着方程组对任意 $B \in k^n$ 有唯一的一个解；另一方面，若 A 是奇异的，即矩阵方程 $AX=0$ 有非零解，则线性映射不是到上(onto)的，而这意味着：(i)存在 $B \in K^n$，对该 B，方程组 $AX=B$ 没有解，或者(ii)若有解存在，它不是唯一的。

我们着重指出：两个相伴方程组 $AX=B$ 与 $AX=0$ 之间的基本关系由下述定则给出：假设 u 是非齐次方程组的一个特解，而 ω 是相伴齐次方程组的一个通解，则 $u+w=\{u+w: w \in W\}$ 是非齐次方程组的通解。

如 $m=n=3$，即 A 为一 3 阶矩阵——洛书矩阵。应用上述定则，可以得出：在三维空间 K^3 内，洛书矩阵提供了在用线性映射求解线性方程组时的一切可能场合。

3. 洛书矩阵的不变量

在研究矩阵与线性变换时，曾发现某些代数式的集合，它们在通过一个线性变换时是不变的。这些函数一般被称为特征函数，它们是由在线性变换下不变的性质所构成。因此当吾人寻求可表达线性变换内在性质的数学式时，可用求取代数不变量来代替上述问题。由于洛书数的奇幻性质，洛书矩阵内就蕴涵着一些不变量。现列举洛书矩阵的不变量的三种类型如下。

(1)几何不变量

在焦氏洛书数字几何学(第 4 章)中，我们取洛书的 3 行或 3 列作为 3 个基矢，张成三维洛书空间。根据矢量几何学，矢量长、二矢量的数量积与矢量积在线性转换下都是不变的。我们可以在所有 72 个不同的洛书矩阵形式中等同地看待这些不变量关系。让我们通过洛书验证它们：

列基矢：$A=(4,\ 3,\ 8)$　$B=(9,\ 5,\ 1)$　$C=(2,\ 7,\ 6)$

行基矢：$A'=(4,\ 9,\ 2)$　$B'=(2.\ 5,\ 7)$　$C'=(8,\ 1,\ 6)$

①一个矢量长在转换下是不变的：

$\overline{A}=\sqrt{4^2+3^2+8^2}=\sqrt{89}=\sqrt{2^2+7^2+6^2}=\overline{C}$；$\overline{B}=\sqrt{9^2+5^2+1^2}=\sqrt{107}$

$\overline{A'}=\sqrt{4^2+9^2+2^2}=\sqrt{101}=\sqrt{8^2+1^2+6^2}=\overline{C'}$；$\overline{B'}=\sqrt{3^2+5^2+7^2}=\sqrt{63}$

②两个矢量的数量积是不变的：

$A\cdot B=(4,\ 3,\ 8)\cdot(9,5,\ 1)=36+15+8=59$

$B\cdot C=(9,\ 5,\ 1)\cdot(2,7,\ 6)=18+35+6=59$

$C\cdot A=(2,\ 7,\ 6)\cdot(4,3,\ 8)=8+21+48=77$

$A'\cdot B'=(4,\ 9,\ 2)\cdot(3,5,\ 7)=12+45+14=71$

$B'\cdot C'=(3,\ 5,\ 7)\cdot(8,1,\ 6)=24+5+42=71$

$C'\cdot A'=(8,\ 1,\ 6)\cdot(4,9,\ 2)=32+9+12=53$

③两个矢量的矢量积是不变的：

$A\times B=(4i+3j+8k)\times(9i+5j+k)=-37i+68j-7k=-B\times A$

$B\times C=(9i+5j+k)\times(2i+7j+6k)=23i-52j+53k=-(C\times B)$

$C\times A=(2i+7j+6k)\times(4i+3j+8k)=38i+8j-22k=-(A\times C)$

$A' \times B' = (4i + 9j + 2k) \times (3i + 5j + 7k) = 53i - 22j - 7k = -(B' \times A')$

$B' \times C' = (3i + 5j + 7k) \times (8i + j + 6k) = 23i + 38j - 37k = -(C' \times B')$

$C' \times A' = (8i + j + 6k) \times (4i + 9j + 2k) = -52i + 8j + 68k = -(A' \times C')$

对每个方阵 A 存在一个特殊的数量称为 A 的行列式值；通常用 $\det(A)$ 或 $|A|$ 来表示。这个行列式值的函数是同各类线性算符的性质打交道时的必备工具，笔者假定读者已具有方阵行列式的全部必要知识。因而由于篇幅的限制，不再涉及洛书矩阵行列式的细节。在这里只须参考我们在洛书矩阵论中的一些发现即可。

将矩阵代数应用于各种洛书矩阵所成的集合，每个矩阵的 3 行或 3 列形成 3 个基矢，它们形成一个平行六面体，该平行六面体的体积等于该矩阵行列式值的大小。有趣的是，洛书本体的行列式值是 360°，而自然洛书的行列式的值是 0。而且在使用诸如旋转、反射与逆置等这样的对称运作之后，笔者构造了变换的流程图以示出几何构形与它的相伴代数结构间的变换机理。以这些结果为基础，笔者建立了焦氏洛书矩阵论。该理论的中心学说可表述为：在三维矢量空间中，几何构形从 0 度到 360 度的变换等价于代数结构由它的自然形式到本体形式的变换。

(2)洛书矩阵的特征方程与特征值

设 $T: V \to V$ 是域 K 上的矢量空间 V 上的一个线性算符，且设它在一个已知基底上的代表矩阵为一个 n 阶方阵 A。如果存在一个非零矢量 $v \in V$ 使 $A(v) = \lambda v$，则数量 $\lambda \in K$ 称为 A 的一个特征值。因而 T 的一个特征值是一个数，它和某个非零向量的纯量积就是 T 的像。吾人称满足此关系的每个矢量为 A 的属于特征值 λ 的一个特征矢量。所有这种矢量的集合是 V 的一个子空间，称为 λ 的特征空间。使 λ 成为 A 的特征值的必要与充分条件是：算

符 λIn $-A$ 是奇异的(其 中 I_n 是 n 阶的单元方阵)。从而 λ 的特征空间是 λIn $-A$ 的核。此矩阵[λIn $-A$]被命名为 A 的特征矩阵，而它的行列式值$|\lambda \mathrm{In}-A|$是 λ 的一个多项式，称为 A 的特征多项式。我们也称 $\det(\lambda \mathrm{In}-A)=0$ 为 A 的特征方程[本征(eigenequation)方程]。此方程的根就是所需的特征值。

术语特征值与特征矢量[或真值(proper value)与真矢量(proper vector)]通常多用以代替本征值(eigenvalue)与本征矢量(eigenvector)。

让我们应用矩阵[$\lambda I-A$]求出洛书矩阵的特征方程、特征值与特征向量。

$$[\lambda I-A]=\begin{bmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-4 & -9 & -2\\ -3 & \lambda-5 & -7\\ -8 & -1 & \lambda-6\end{bmatrix}$$

从而 $\det[\lambda I-A]=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-5 & -7\\ -1 & \lambda-6\end{vmatrix}-(-9)\begin{vmatrix}-3 & -7\\ -8 & \lambda-6\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-3 & \lambda-5\\ -8 & -1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-4)[(\lambda-5)(\lambda-6)-7]+9[-3\lambda+18-56]-2[3+8\lambda-40]$$

$$=(\lambda-4)[\lambda^2-4\lambda+23]-27\lambda-34\lambda-16\lambda+74$$

$$=\lambda^3-15\lambda^2+24\lambda-360$$

$$=(\lambda-15)(\lambda^2+24)$$

A 的特征方程是$(\lambda-15)(\lambda+\sqrt{24}i)(\lambda-\sqrt{24}i)=0$，$A$ 的特征值是 $\lambda=15$，$\lambda=\sqrt{24}i$，$\lambda=-\sqrt{24}i$。这里我们研究两种情况：(i)A 为实数域 R 上的矩阵，则 A 仅有一个特征值 15 。(ii)A 为复数域 C 上的矩阵，则 A 有 3 个不同的特征值：15，$\sqrt{24}i$ 与$-\sqrt{24}i$。由于这里我们仅对实数特征值感兴趣，我们取 $\lambda=15$。为了求出同 $\lambda=15$ 相伴的特征向量 X，应用 $\lambda=15$ 作方程组$[\lambda I-A]=0$：

$$\begin{bmatrix}15-4 & -9 & -2\\ -3 & 15-5 & -7\\ -8 & -1 & 15-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \text{ 或 } \begin{bmatrix}11 & -9 & -2\\ -3 & 10 & -7\\ -8 & -1 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

因此方程组为：$11x_1-9x_2-2x_3=0$，$-3x_1+10x_2-7x_3=0$，$-8x_1-x_2+9x_3=0$。此方程组仅有一组解：$x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=1$。因此，$X=(1,1,1)$是与 $\lambda=15$ 相伴的 A 的一个特征矢量。它产生而且也形成对应于 $\lambda=15$ 的特征空间的一个基底。

值得指出的是，对一个方阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ 来说，A 的特征多项式由公式：$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A]=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+$

$$\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda-\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

给出。而且，以代数方程论为基础，吾人得出与特征方程、特征值求法相关的三个定理：(1)具有实或复系数的任意 n 次代数方程应至少有一个实或复根。(2)$f(\lambda)=\lambda^3+A\lambda^2+B\lambda+C$ 可以唯一地表示为一次因子的积：$f(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)$，其中 a，b，c 是实或复根。(3)$f(\lambda)$的系数 A，B，C 与它的根的关系可用量示出：$-A=a+b+c$，$B=ab+bc+ca$，$-c=abc$。事实上，对洛书矩阵我们有 $f(\lambda)=\lambda^3-15\lambda^2+24\lambda-360=0$，且三个根是 $\lambda_1=15$，$\lambda_2=\sqrt{24}i$，$\lambda_3=-\sqrt{24}i$。我们看出 $\sum\lambda_i=15$，$\sum\lambda_i\lambda_j=24$，且 $\Pi\lambda_i=360$。

由第 4 章，已知 $\lambda=15$，该数正是洛书中各三序数字之和，也是从坐标原点到洛书三角形各顶点的距离。

三、洛书的研究结论

关于洛书的研究结论是：

1. 洛书图阵是由 1 到 9 的 9 个数字组成的具有幻方特性的 3×3 阶矩阵。

2. 洛书表示 9 个数的集合 $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，它的各元素间的基本泛函关系为 $R_l=\{(x, y, z); x+y+z=15; x, y, z\in L\}$。

3. 洛书是由它的 3 个列矢量(4，3，8)；(9，5，1)；(2，7，6)或 3 个行矢量(4，9，2)；(3，5，7)；(8，1，6)张成的三维矢量空间的代表矩阵。

4. 洛书表示数的十进制。

5. 洛书表示以模 10 同余的商集 Z/R_{10}。

基于本研究的上述重点，作者建议以洛书数矩阵为生成基底建立“洛书数空间”。此外，作者倡导将集合论与矩阵式应用于洛书数集，通过三种不同的数学方法：算术算法、代数演算与几何构形，可以建立多种的数学系统与结构。而所有这些方法又都是洛书数的集运算和/或矩阵表式的结果。

参 考 文 献

[1]Joseph Needham, "Science & Civilisation In China", Cambridge University Press, 1959, Vol. 3, pp. 55－140.

[2]D. J. Struik, "On Ancient Chinese Mathematics", The Mathematics Teacher, 56, (1963), pp. 424－432.

[3]W. S. Andrews, "Magic Spuares And Cubes", Dover Publications, Inc. New York, 1960.

[4] Y. H. Ku and N. X. Chen, "On Systematic Procedures For Constructing Magic Squares", J. Franklin Inst. Vol. 321, pp. 337 － 350,

1986.

[5]Weily F.CHIAO，“焦氏洛书矩阵学说”，《世界科学》1987年3月。

[6]Weily F.CHIAO，“洛书的数学研究之二——焦氏洛书数字几何学导论”，《世界科学》1991年3月。

第 6 章 《易卦》的数学研究之一
——焦氏《周易宇宙代数学》原理

一、缘　起

1990 年 10 月，笔者参加在中国河南省安阳市召开的国际周易与自然科学讨论会，作成两件极富意义的工作：一件是向大会呈交并简介作者所写的《洛书的数学研究》3 篇论文；一件是在会议讨论中谈到中国哲学家如冯友兰等多将《易经》理解为“宇宙代数学”，但却说不出它的代数符号和数目字，这两件事的巧合对作者启发出一种决定性的认识：在对中国传统文化的继承、重整与发扬工作中，第一件要事就是如何建立“周易宇宙代数学”；而这件事的启蒙研究工作，恰好正是作者在完成对《河图》和《洛书》的数学内涵研究后的必然继续。本文就是这一启蒙研究工作的成果报告。谨此献给中国及世界的专家和学者们，敬请指教和批评。

二、导　论

世界人类文化众多，但历史学家公认有四大古老文化，即巴比伦文化、埃及文化、印度文化与中国文化。四者皆对现代科学文化有重大影响与贡献。一种民族文化的形成，所需构成因素甚多，诸如人民、血统、语言、文字、地理、政治、经济、科学、工艺等；但是要形成一种光辉灿烂、绵延不断并能为人类作出重大贡

献的民族文化，最基本的必需因素就是该民族的“数学思维”。在世界人类文化史中，最典型的范例就是中华民族的原始文化，它的主流发源于黄河临近洛水地区，就是中国史籍所称的“河洛文化”。

“河洛文化”虽然源远流长，但它的原始基本内涵却是自然数及其由加、减、乘、除 4 种演算所衍生的人类的“数学思维”；它的具体表征就是传说中在上古龟甲上所刻画的《河图》、《洛书》和《易卦》三类符号图型，三者都不是直接用数字或其演算式来表达，而是由人类数学思维所结晶出来的数学符号模型。

根据史传，《河图》出现在伏羲时代(约 3300BC)，《洛书》出现在夏禹时代(2100BC)，而《易卦》由伏羲画卦开始到成书为《易经》，却历时长达约 3000 年。河图和洛书只是两种数型图阵而无文字说明，即《周易·系辞传》所称：“河出图，洛出书，圣人则之”，易卦是由阴爻与阳爻两种符号所形成的不同层次的排列与组合，主为占卜与记事之用。易卦经过夏、商两代的演进，直到文王作卦辞，周公作爻辞，孔子等人作《系辞》等传文，于是一部居“六经”之首，开中国文化之源的《易经》，就在《周易》的名义下流传于中国，现并扩及到全世界。

综合的讲，《周易》的内容包括三大部门：《易卦》、《易经》与《易传》，由《易卦》的起源到《易经》的成书，中间经过约 3000 年的时空发展；由《易经》的成书到《易传》的论释，中间又经过约 500 年的时空发展，所以《周易》一书蕴涵着中华民族在 3000 余年的历史洪流中所熔汇而成的原始文化，在中国文化史上，《周易》孕育了各种学术的萌芽、成长和发展，中国传统文化从秦汉到明清无不与《周易》有关。直到今日，所有研究易卦符号及阐释《周易》内涵的各种不同学术就形成一门庞杂的、包罗万象的学术系统，通称“易学”。

《周易》是一部熔合哲学、数学和科学于一炉的古籍，它不只

孕育出中国传统文化的成长与发展，亦影响着近代世界科学家的思维与创作，根据中国传统观点，易学研究可划分为三大学派：象数派、数理派与义理派。根据现代 科学观点，易学研究的内容可概括为三大范畴：科学、数学与哲学，到了今日，由于中外学术的交流与融合，易学中所蕴涵的自然法则及其科学、数学与哲学的义理，更影响着未来整体人类思维的方式、法则与运用。这就验证了中国古语：“周虽旧邦，其命维新”；而《周易》的生命力也确是历久弥坚了。

三、易卦符号系统与现代数学的挂钩问题

数学是一切科学的基础和语言。根据作者的研究，《河图》、《洛书》和《易卦》三者都可统属为由人类数学思维所结晶出来的数学模型，代表中国传统文化生长的数学基础。自汉代以来，中国学者就将此三类图型理解并通称谓：“河、洛、易数”。宋代理学家朱熹更将此三图型同置于《周易本义》一书之首，表示三者间必有相互演化关系存在。但2000年来，在易学发展的历史洪流中，迄今尚未能建立“河、洛、易数”的数学体系；亦很少学者根据现代数学理论阐释易卦符号系统的数学内涵。作者认为在对中国传统文化的继承、重整与发扬工作中，如何建立“周易宇宙代数学”实是一件有重大意义的基本研究命题。

显然地，《河图》是数，《洛书》亦是数，因为两者都是用点代表数所构成的数型图阵，作者对此两图阵的数学内涵已有3篇论文阐释，关于河、洛、易数三者演进的关系当再为文论述，本文只论如何建立“周易宇宙代数学”，或只简称曰“易代数”。

因为易卦只是用阴爻与阳爻两种符号所构成的不同层次的排列与组合，其中既无数字，亦无运算法则，所以历代习易者均有“易数”难通之感。在现代易学研究的论著中，所有关于易卦符号

的数学论述，全都局限于阴阳两爻排列的顺序、方位、对称、置换、平衡等性质的描绘，迄未能建立易卦符号系统的数学定义、数值单位与演算法则。所以要将易卦与现代数学挂钩的基本问题是：如果“易”是数的话，“易数”是什么？

根据“易”的开宗明义：“一阴一阳之谓易”，则要建立“周易宇宙代数学”的启蒙核心问题有三：1. 阴或阴爻的代数定义，符号与数目是什么？2. 阳或阳爻的代数定义、符号与数目是什么？3. 易或易卦的代数定义、符号与数目是什么？

由于篇幅所限，作者假定读者都已掌握了《周易》和《代数》的基本知识，本文将不再引述周易的哲学与科学内涵，只根据现代数学理论，研究易卦符号系统的数学内涵，以建立“周易宇宙代数学”。又为了行文精简起见，本文将根据作者研究结果，采用开门见山及豁然贯通方式，首先列出建立周易代数学的基本命题，并在命题中首先给出阴、阳与易的代数定义，然后再推导建立定义所根据的数学理则；最后，初步叙述了建立周易宇宙代数学的3个理论基础。

四、建立周易宇宙代数学的基本命题

1. 作者对设立阴、阳与易的英文符号之建议

(1)阴或阴爻的英文符号

作者建议将阴或阴爻的英文名词由现时通用的 Ying 改作 Xin，以取其与阳字不同的字首符号。例如阴爻符号原为“－－”，其英文符号表作 X 或 x，又如坤卦系由 3 个阴爻组成，由下到上写作☷，其英文符号则为由左到右表作 XXX 或 xxx，又如艮的阴阳符号为☶，其英文符号写作 XXY。

(2)阳或阳爻的英文符号

阳或阳爻的英文名词仍用 Yang。例如阳爻符号原为“—”，其英文符号表作 Y 或 y，又如乾卦系数由 3 个阳爻组成，由下到上写作☰，其英文符号则为由左到右表作 YYY 或 yyy，又如巽的阴阳符号为☴，其英文符号写作 XYY。

(3)易或易卦的英文符号

作者建议将《易经》的英文翻译定作 Yi-Ching，而不用 I-Ching，亦即采用 Yi 作为易的英文符号。当将易或易卦作为易数时，作者建议从《周易》之周(Zhou)字，其英文符号用 Z 或 z 表示。

作者建议将阴、阳与易的英文符号分别用 X、Y 与 Z 代表，乃是根据对三者代数定义的研究结果而定，如下节所述。

2. 建立阴、阳与易的代数定义之研究

建立“周易宇宙代数学”的首要研究命题就是建立阴、阳与易的代数定义。更具体点说，要建立阴、阳与易的代数定义，就必须研究建立易卦阴阳符号体系所依据的数域(即数字系统)是什么？因为自然界中每一物理系统的成立，必须建筑在一个对应的数域上面，以致两者在代数运算中可以建立一与一的对应关系，如此吾人始能将物理体系的性质之描绘转换成数量的计算。

为了解答上述的问题，让我们先复习一下数论中的数域形成原理，作者在前文中已讨论过，现代数学中所用数系都是以自然数集为基础，再依次衍生出整数集，有理数集，实数集，直到最高最广的复数集。诚然，现代数学中的数理逻辑与公理都植基于自然数集的结构、性质与算术运算，并用此来说明宇宙中各种不需证明的现象与事实。

再回顾一下易学发展的历史过程。第一层次将阴、阳符号与

数字建立对应联系的创始人是孔子，他在《系辞传》中说："天一地二，天三地四，天五地六，天七地八，天九地十。"天指阳爻，地指阴爻。很明显地，他用阴阳两爻代表十进制自然数系中的基数，阳表奇数，阴表偶数。这样就将自然数集区分为两个子集：一为奇数或阳数子集，一为偶数或阴数子集，两者互为一一对应关系。但是，孔子的阳奇阴偶概念，只能建立两个数系的一一对应关系，而不能建立两者的互换恒等等关系，这亦就不能符合周易体系之"阴阳二重性"的特质。(有关周易体系之阴阳二重性特质将在下文中阐述)。事实证明，孔子以后的易学家们从未能根据"阴偶阳奇"的概念而建立起一套整体的周易数学体系。

第二层次以数学符号代替阴阳两爻符号的创始人当推德国数学家莱布尼兹，他是根据十进制创立二进制数系的人。他于18世纪初提出以0代替阴爻"－－"以1代替阳爻"－"，这样就可将每个易卦用二进制数码表示，各卦的位序亦可按十进制的数序排列出来。现代全世界的易学家大都接受了易卦阴阳符号与二进制算术的一致性这一概念，而莱布尼兹阐释易卦结构的功绩亦将永志史册。但是，作者仍需指出：根据易卦之阴阳二重性原理来解析，莱氏的阴零与阳一关系的成立，必须局限于将0与1作为两个数符以置换"－－"与"－"两个爻符，它仍然只是一个二进制符号系统，并不能以0与1所构成的二进制数值系统，作为阴阳两爻与易卦的代数定义建立起一套整体的周易宇宙代数学。

可以认为，笔者开发了第三层次且建议用现代数域系统代替易卦阴阳符号系统。为了建立阴爻、阳爻与易卦的代数定义，笔者拟定了两个研究命题，一为周易体系及其数学理则的建立，一为建立周易宇宙代数学的理论基础之研究，根据此两项研究的结果，笔者得出以下重要结论：

(1)易卦阴阳符号系统就是现代数域中的复数数域系统。

(2)每一易卦代表一个易数，每一易数就是一个复数，其代数式为 $Z=X+Yi$，式中 X 为实部，Y 为虚部，i 为虚数单位。

(3)阴爻就是实数的单位，表作 $\mathrm{Re}=\sqrt{1}=\pm1$。

(4)阳爻就是虚数的单位，表作 $\mathrm{Im}=\sqrt{-1}=\pm i$。

根据这 4 个定义，周易宇宙代数学的建立就将形成现代复数代数学的自然基底，也就是说：易数衍生复数域正与自然数衍生实数域相互对应。

3. 周易体系及其数学理则的建立

周易体系是人类文化史中最早的一种思维体系，它具有最简单、最综合与最抽象的三种特质。易卦本体原只是一种阴、阳两爻符号的系统或体系，但人类对此符号系统的理解与阐释，自然就形成一种思维体系。根据周易内容及历代学者的论述，笔者将周易体系划分为三大从属体系，并推导每个从属体系的建立及其所依据的数学理则于下：

(1)周易阴阳符号体系及其数学理则

《周易·系辞传》称："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦"。这一定义是为了解释八卦衍生顺序而定的。根据这一定义，吾人可谱出八卦符号体系的结构组织如图 6-1。作者在图中将阴、阳两爻符号与其英文符号并列于括号中，并将八卦符号所代表的自然界的对应形象列在图中最下方，如乾表天，坤表地等。

根据图 6-1 所示八卦生成原理，读者不难如法推演出十六，卅二，及易经中所论述的全部六十四卦。因为读者已掌握了周易的基本知识，作者建议读者参考王赣等所著《古易新编》中的伏羲六十四卦次序图今译简表，该图将周易阴阳符号体系全部构成及六十四卦的二进制爻位与十进制数值全部示出。(见本章附录 1)

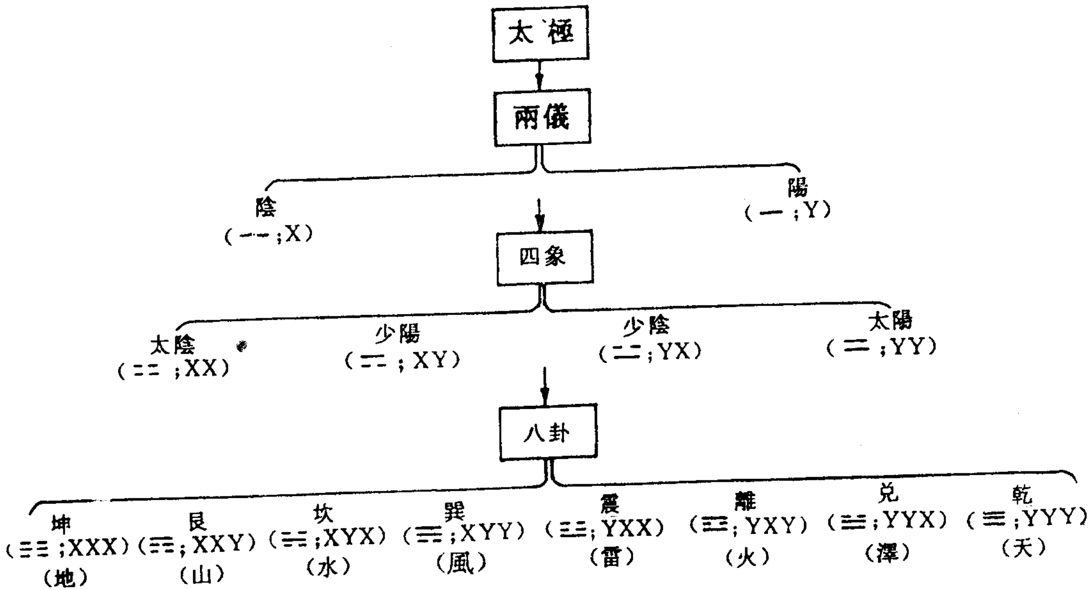


图 6-1　八卦之阴阳符号(及英文符号)体系构成图

伏羲创立易卦阴阳体系所按照的数学理则就是一个几何级数的序列，他采用了比值为 2 的等比级数，作者建议将此级数命名为伏羲级数，表作符号 Fs，按照集论，Fs 的建立公式为：

$Fs=\{1,2,4,8\cdots\}=\{2^0,2^1,2^2,2^3\cdots\}=\{2^n:n=0,1,2,3,\cdots\}$这一 Fs 公式亦就是“易数集”或简曰“易数”的公式，现代易学家亦称此伏羲数集为“太极序列”。

易数集 Fs 的基本性质与结构蕴涵着三大数学特质：①它的构成元只是一个自然数 2，构成元间的数学操作是自乘即平方，平方的还原或逆向操作是开方。②$2^n$ 的序列亦可写成 $(1+1)^n$，由此可推导出二项式定理 $(x+y)^n$。③$2^n$ 的数值序列可用作整数域中二进制系统，两者完全吻合，吾人根据 Fs 所蕴涵的上述三大数学特质，就可推导出易卦阴阳符号体系的全部数学内涵，包括周易体系的阴阳二重性等等，将在下面专节中讨论。

作者此处必须解答的首要问题为：如何根据上述 Fs 的第一项数学特质推导出阴阳两爻符号所代表的数值单位？根据数论，自然界中的线性系统是用自然数集和整数集来描绘，其中最基本与最简单的代数方程式为 $x+1=0$，其解就生出 $x=-1$ 的负数。Fs 数集的建立就可描绘自然界中的非线性系统，它引入了代数中的二次方程式与平方和开方的操作，其中最简单与最基本的代数方程式为 $y^2\pm1=0$，其解就生出实数单位，$y=\sqrt{1}=\pm1$ 与虚数单位 $i=\sqrt{-1}=\pm i$。作者据此乃定义阴爻所代表的数值单位为实数单位 ±1、阳爻所代表的为虚数单位 $\pm i$，以符合周易体系的阴阳二重性特质。

在各类数集中，虚数单位 $i=\sqrt{-1}$ 的物理意义虽难了解，但它却是描绘非线性系统中的必需数值单位。因为非线性系统的主要数学特质为不规则性与混沌性，而 $i=\sqrt{-1}$ 的建立就是不规则数字或混沌数字的典型范例。

(2)周易天、地、人三才体系及其数学理则

根据传辞所称："易之为书也，广大悉备，有天道焉，有人道焉，有地道焉"。中国古代学人就将易卦阴阳体系与自然界的事物比拟互释，建立了天、地、人三才体系。又根据系辞下传二章的解释："古者庖牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。"这段话说明易卦阴阳符号是象徵天地间万事万物与人类生命交织构成的象、数、理系统模型。作者应用现代文化语言，可谱出周易的天地人三才应用体系，如图 6—2 所示。天、地、人三才的有机结合产生出三者中所含象、数、理的互释，再进而衍生出人类社会与自然环境间所构成的数、理、哲学交织合成的总体系，并形成人类文化中的各种信息与系统科学。

根据周易三才体系的结构，吾人可解析出建立此体系的数学理则有三：①它是依据阴阳二元系统(即太极)在天、地、人三大范畴中的作用而建立的。吾人如将阴阳统一体的太极作为元始单位，它所发挥与应用的范畴就构成一个三维体系。②周易象、数、理应用系统的衍生是准照比值为 3 的等比级数而形成，笔者建议将此级数命名为文王级数，表作符号 Ws，它的建立公式为：

$$W_S=\{1, 3, 9, 27, \cdots\}=\{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \cdots\}=\{3^n: n=0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

③易卦的本体是阴阳二元体系或二重结构，但易卦的作用空间则是天、地、人三才系统。为了体用兼备，易卦应用体系的数学结构就必须采用 2，3 两基数的结合。这就形成了建立易卦体系的数学公式就是二项式定理中的三次幂与六次幂。这亦说明了文王订定易卦时，只用八(2^3)卦与六十四(2^6)卦(不用十六或卅二)的衍生结果。

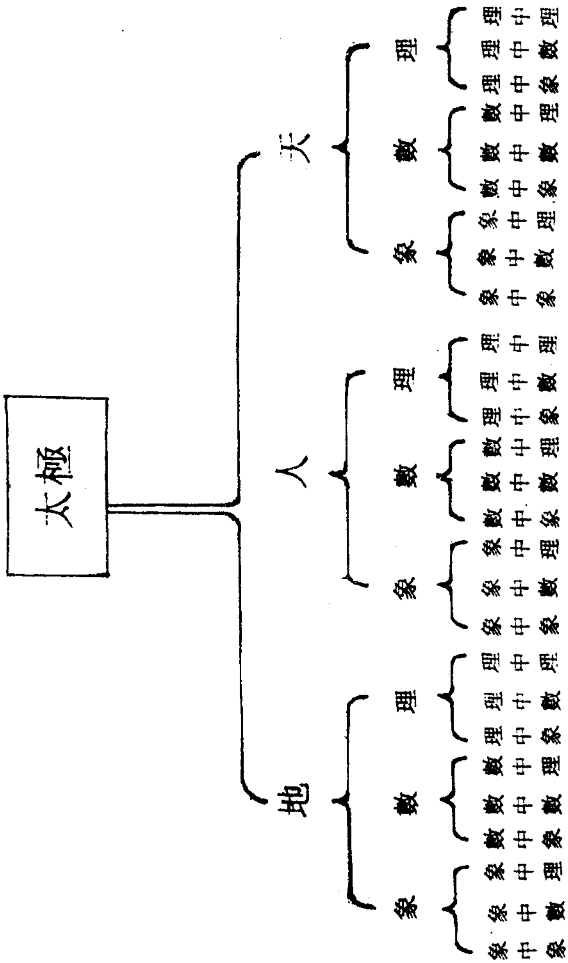


图 6-2　周易天地人三才体系构成图

周易三才体系形成的数学理则在《说卦传》中载有生动的说明："昔者圣人之作易也，将以顺性命之理。是以立天之道，曰阴与阳；立地之道，曰柔与刚；立人之道，曰仁与义。兼三才而两之，故易六划而成卦；分阴分阳，迭用柔刚，故易六位而成章"。这里我们暂不论阴阳二元的各种科学与哲学含义，只就易卦的数学结构论，这段话就阐释了由$(X+Y)^3$而生8卦，由$(X+Y)^6$而生64卦，吾人根据此二项式展开定理，就可推导出易卦为一封闭的阴、阳循环系统，其中阴爻与阳爻必须符合排列与组合公式，并遵守置换、平衡与守恒定律。

(3)周易宇宙时空体系及其数学理则

在人类文化史中，中华民族是最早认识宇宙时空为一体的。根据"上下四方之谓宇，古往今来之谓宙"的空间和时间的定义，可知空间是指上下四方的三维垂直轴系，时间是指和空间相互垂直的另一线性轴系。这种原始的时空一体观念正与现代相对论学说中的四维时空体系相符合。古代中国人对时空一体的最佳描绘就是"日出而作，日入而息"八个字；再就宏观世界论，亦有"沧海桑田"之谚。当然，人类对时空结构的认识是跟着科学、数学与哲学知识的进步而深化，由欧氏几何空间，伽利略落体运动，经过牛顿的绝对时空，直到爱因斯坦的时空相对论，宇宙时空的性质始明于人类，但这些超出本文范围，作者现只简论周易宇宙时空体系的建立。

根据《易经》，周易宇宙时空体系是由乾、坤、时、位四大重要概念组成。四者中乾、坤是万物的根源(太极)，时、位即指时间与空间，乃万物变化之所由出，它基本上是一套自然宇宙观。自然界中各种事物的作用与演化，必须因时制宜，因地制宜，时空配合，交织天成，以维持宇宙中的因果关系。吾人根据描绘宇宙动态必须时空一体的四维几何架构，乃谱出周易宇宙时空体系的构成如图6-3，此图标志出宇宙间各种事物的存在与变化必须用

时间和空间不可分割的一体观点来描绘。易传中之象传主系卦辞发挥；其重点在言时、位(空间)，尤多言时，其中盈虚、消长、终始、往复皆为时间的属性。

$$\boxed{\text{太\ 极}}\left\{\begin{array}{l}\text{空间}\begin{cases}\text{一维直线}(X\text{ 轴})\\ \text{二维平面}(X\text{—}Y\text{ 轴系})\\ \text{三维立体}(X\text{—}Y\text{—}Z\text{ 轴系})\end{cases}\\ \text{时间}(T\text{ 或 }t\text{ 轴})\end{array}\right\}\text{时空一体函数的建立}$$

图 6-3　周易宇宙时空体系构成图

周易宇宙时空体系的建立奠定了描绘自然界中各种动态现象的架构。亦构成了人类对各种科学、数学与哲学的思维与体验的底基。根据集论，吾人可定义“宇宙”为自然界中所有时空体系的集合，而自然界中的一切事物均可视作时空四维体系中的点集。数学中所有函数的建立、分析与操作均以时空一体为理则，而以时间变数为基底的微分与积分更是函数分析中的主体。关于时空四维体系的几何性质及轴系转换，读者可参阅专书。本处为篇幅所限，作者只提出周易时空体系的代表矩阵及它的特征方程式和特征值的数学理则于下。

在线性系统中，一个三维空间的代表矩阵就是众所周知的三维单位矩阵或恒等矩阵 I_3，如图 6-4(a)所示，当引入第四维时间轴系时，它必须与三维空间轴系相垂直，则所构成的四维时空矩阵必如图 6-4(b)示，或其转置形式如图 6-4(c)。作者建议将此四维时空矩阵名作“周易矩阵”或简称为“易矩阵”，表作[A]。关于周易矩阵的性质及其转变为各种不同形式如对称、恒等及三角矩阵的操作，本文不能多作论述。现只说明在时空四维方阵[A]的作用下，代表某一事物的一个特定矢量[X]可以生出数值为 λ 的盈虚消长的数学理则于下：

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ [A]=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ A^T=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}。$$

(a)　　　　　　(b)　　　　　　(c)

图 6-4　三维恒等矩阵(a)及周易四维时空代表矩阵$(b、c)$

根据线性代数学，当一 n 阶方阵$[A]$作用到矢量$[X]$时，如果不令$[X]$的方向改变，只令其长度发生倍值为 λ 的增长或缩短时，吾人就可建立一基本方程式 $AX=\lambda X$，并命名合乎此式的 λ 为$[A]$的特征值，$[X]$为其特征矢量，如果吾人应用恒等矩阵 I，将 λ 值写作矢量形式 λI 时，则上述基本方程式 $AX-\lambda X=0$ 就可写作矩阵方程式$[A-\lambda I]X=0$，吾人称此$[A-\lambda I]$为$[A]$的特征矩阵。此一矩阵方程式的意义有二：

①特征值 λ 的选定可令$[A-\lambda I]$具有 0 维空间(null-space)。

②特征矢量 X 位于$[A-\lambda I]$的零维空间内。为了达成此两要求，吾人自不能选用$[X]$为零值的矢量，而必须令$[A-\lambda I]$成为奇异矩阵(singular matrix)，亦即令其行列式值为零。换句话说，λ 值可能成为$[A]$的特征值的必需充分条件就是$[A-\lambda I]=\det[A-\lambda I]=0$，此式的展开就是 λ 的 n-次多项式，即曰$[A]$的特征多项式，其解就是所求的 n 个特征值 λn。将每一 λ 值代回到$[A-\lambda I]X=0$ 式内，就求得每一 λ 值所对应的特征矢量 X。

读者根据上述理则，就可求得周易矩阵$[A]$的三项特征如下：

(i)周易矩阵的特征多项式：$\lambda^4-1=(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)=0$。

(ii)周易矩阵的特征值：$\lambda_1=1$；$\lambda_2=-1$；$\lambda_3=+i$；$\lambda_4=-i$。

(iii)周易矩阵的特征矢量：$X_1=(1,1,1,1,)'$；$X_2=(1,-1,1,-1)'$；$X_3=(1,i,-1,-i)'$；$X_4=(-1,-i,1,i)'$。

作者曾定义阴或阴爻的数值单位为实数单位 $\mathrm{Re}=\sqrt{1}=$

±1，阳或阳爻数值单位为虚数单位 $\mathrm{Im}=\sqrt{-1}=\pm i$，于此可得证明。

4. 建立周易宇宙代数学的三个理论基础

(1)宇宙二重性原理(The Principle of Cosmos Duality)

在人类对宇宙的体验认知过程中，从开始到现在，不断地在建立着一个宇宙二重性原理。就是说，宇宙间各种事物现象的组成、结构、性质、作用与功能，都可用性质相异的两重实质或两个部分来解析与组合(或对立与统一)。我们现举例说明如下。

在原始时代，人类体认了宇宙中天与地的盖载万物，日与月的运行规律，山与川所构成的地理，水与火所表现的相异性质与功能，以及人类必由男女两性所组成的家庭与社会。

随着科学知识的进步，人类体验出各种科学范畴中的二重性，例如，地球为一磁体，而磁体必然呈现南北两极；物质可以带电，而电必分阴阳两荷。物理为质量与能量的二重组合，化学为无机与有机的二重组合，生物为生长与生殖的二重组合，哲学为物与心或物质与精神的二重组合等等。

到了20世纪，宇宙二重性原理更为人类所认识。爱因斯坦的相对论证明了时间和空间互为一体，及物质的质量与能量可按照 $E=c^2M$ 的关系相互转变。在微观世界的研究中，量子力学的建立证明了组成物质的一切基本质点的行为和状态都必须由粒子和波动这二重性来阐释。

展望未来，人类文化的内涵将再如何继续充实，以求发现宇宙二重性的更高境界，实为人类前途发展的希望与挑战。

(2)数学体系中的二重性特质(The Dual in Mathematics)

根据近代世界数学史的记载，我们可以看出近200年来数学家特别注意到数学结构中的二重性特质。在各类数学系统中，数

学定义、结构、操作及定理的形成大都需用二重性质的构成单元(或单位)来组成；当此两个互为二重性的单元互换时，数学定理仍维持不变，现试以 3 个最基本的例子说明：①在三角学中：角与边构成两个互为二重性的部分，在有关角与边的定理中，如将角与边相互置换，定理的真实性不变，例如锐角三角形的两角(边)之和大于第三角(边)。②在平面几何中，点与直线互为二重性，在有关点与线的定理中，如将两者置换，定理仍当成立。例如两点(直线)之间只有一个直线(交点)。③在代数学中，系数与未知数两者互为二重性，如将一恒等式中的系数与未知数相互置换，恒等关系仍然不变，例如 $ax+by+cz=k$，如将系数 a，b，c 与未知数 x，y，z 互换，则 $xa+yb+zc=k$ 仍然恒等。

当然，高等数学中的二重性特质远为深奥复杂、艰难，绝非如上三例之浅显易明，读者需自行探索研究。为了读者的方便，作者现用线性程序设计(linear programming)中求最大值与最小值的问题，说明数学中二重性结构的建立：在一件商品的制造与销售体系中，最小成本与最大利润就构成了系统中的互为二重性的两个部分，设获得最大利润的函数式为 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$，而达到最小成本的函数式为 $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$，两式中的未知数自都必须为正值。设获得最大利润所必须遵从的约束条件可用一不等矩阵方程式表示，则不等关系必须采用($\leqslant$)，方程式必须合乎$[A]_{mn}\cdot[X]_n\leqslant[C]_m$，此式中右边的参数矢量($c_1$，$c_2\cdots c_m$)正是最小成本函数式的系数，而式中左边的每一约束条件就构成最小成本函数中的未知数。此种数学关系与结构自可同样用到最小成本问题中，两者互成一种二重性特质。则最小成本必须遵照的约束条件亦可用一不等矩阵方程式表示，但不等关系必须采用($\geqslant$)，方程式必须合乎$[A]_{nm}\cdot[y]_m\geqslant[b]_n$，此式中右边的参数矢量($b_1$，$b_2$，$\cdots b_n$)就是最大利润函数式的关系，左边矩阵$[A]_{nm}$正是$[A]_{mn}$的转置形式，而每一约束条件正是最大利润函数中的未

知数。

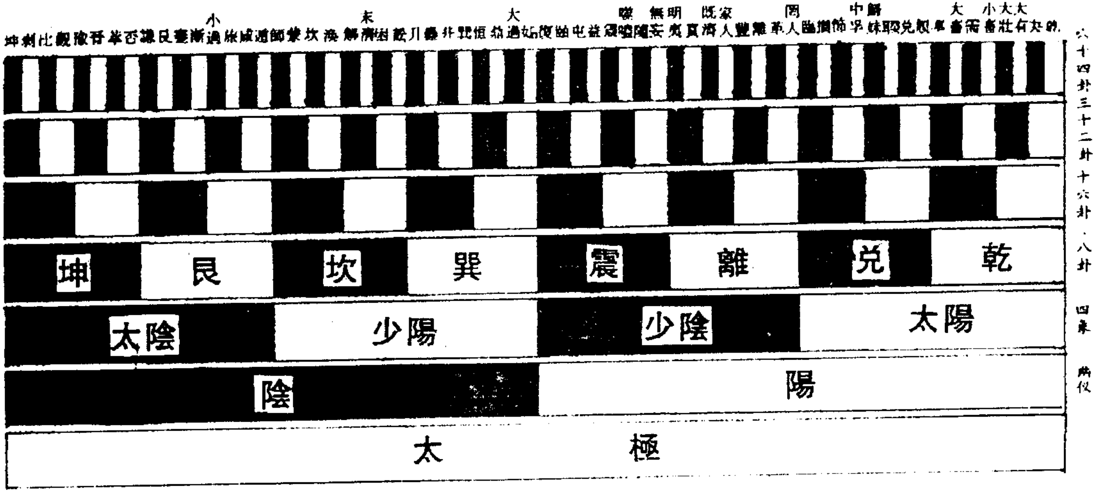
再以数论为例，在一系列整数所成的集合中，最小数与最大数就构成互为二重性的单元，求该数集的最大公约数与最小公倍数就构成互为二重性的操作，在有关最大公约和最小公倍的定理中，如将二者互为置换，定理仍然成立。最后，作者要特别指出：在所有数系中，只有复数系最符合标准二重性的特质，复数中的实数部分和虚数部分要构成互为二重性的部分；在有关复数的操作和定理中，如将两者互相置换，亦即应用“实者虚之，虚者实之”的转变，则操作结果和定理真实性仍然不变，作者将易卦阴阳体系与复数系统等同挂钩，理由在此大明。

(3)周易体系之阴阳二重性(Xin-Yang Duality of The Zhou Yi System)

周易体系的基本特质为太极一体的阴阳二重性，西方学者称之谓中国的“阴阳学说”。易卦阴阳符号系统虽为人类中最古老的思维体系，但它却符合最新的科学理论如相对论和量子力学。现时有人称赞《周易》为中华文化之母，人类文化之精，世界科学之神。其寓意即指易卦阴阳符号体系可能作为自然界中一个基本普遍原理的代表模型。作者提出将宇宙现象的二重性、数学结构的二重性与易卦阴阳符号的二重性三者结合一起，它们不只组成建立周易宇宙代数学的三个理论基础，亦可构成一个综合的、抽象的、到处存在的“阴阳二重性体系”，可用来阐释宇宙本体与人类生命的各种存在状态与现象。

“阴”与“阳”只是两个抽象的概念或符号，用来代表一个体系的两个构成部分，二者价值相当，功能相当，相互可以置换而体系的组成、性质、作用与功能却维持不变。建立阴与阳的基本逻辑或哲学意义超出本文范围，由于篇幅所限，作者在此只提出以《杂卦传》中所谓：“以同相类，以异相名”暂作为本文之结束语。

附录 1　伏羲六十四卦次序图



附录2 《周易》的数学研究

建立焦氏"周易宇宙代数学"刍议

焦蔚芳

《周易》是一部熔合哲学、数学和科学于一炉的古籍，它不只孕育出中国传统文化的成长与发展，亦影响着世界科学家的思维与创作。《周易》的内容包括三大部门：《易卦》，《易经》与《易传》。由易卦的起源到易经的成书，中间经过约3000年的时空发展；由易经的成书到易传的诠释，中间又经过约500年的时空发展。所以《周易》一书蕴涵着中华民族在3000余年的历史洪流中所融汇而成的传统文化。

自汉代以来，中国学者就将《易经》理解为一种"易数"，但因易卦只是用阴阳两符号所构成的不同层次的排列与组合，其中既无数学，亦无运算法则，所以历代习"易"者均有"易数"难通之感，现代中国哲学家如冯友兰等，多将《周易》理解为"宇宙代数学"，实是值得研究的一个重大课题。

根据"易"的开宗明义："一阴一阳之谓易"，则要建立周易代数学的核心问题有三：(一)阴或阴爻的代数定义，符号与数目是什么？(二)阳或阳爻的代数定义，符号与数目是什么？(三)易或易卦的代数定义，符号与数目是什么？

在易学发展的历史过程中，世界学者试图将阴阳符号与数字建立关系的研究可分为三个层次：第一层次的创始人是孔子，他用阳代表奇数，用阴代表偶数；第二层次的创始人为德人莱布尼兹，他用0代表阴爻，用1代表阳爻；第三层次的创始人是焦蔚

芳，他根据对周易体系所含数学理则的研究，发现易卦阴阳符号系统与现代数学中的复数数域的对应关系，因之建立了四个重要结论：(一)易卦阴阳符号系统就是现代数学中的复数代数系统；(二)每一易卦代表一个易数，每一易数就是一个复数，其代数式为 $Z=H+iY$，式中 H 为实数部分，Y 为虚数部分，i 为虚数单位；(三)阴爻相当于实数的单位，表作 $Re=Root(1)=1$；(四)阳爻相当于虚数单位，表作 $Im=Root(-1)=1$。根据这四个定义，“周易代数学”的建立就形成了复数代数学的基础构成部分。

本书为第一次向中国及世界学者介绍焦氏“周易宇宙代数学”，仅能涉及其原理和建元部分，建立易代数的定义、公理、特质、代数运算及基本函数等基础部分。作者建立“周易代数学”的中心目标有三：(一)为对中国古代传统文化的继承，重整与发扬工作开路；(二)为将东方古代的哲学或精神文明与西方现代的物质或科学文明的整合奠基；(三)为促进中国文化成为 21 世纪的世界文化的主流尽力。

第 7 章　《易卦》的数学研究之二
——焦氏《周易宇宙代数学》建元

一、前　言

作者自幼及长，对祖国传统文化所怀的最大困惑问题是："中国先民所创造的河图、洛书与易卦三大符号系统的数学内涵是什么?"为了解答这些问题，乃于 1980 年在美国成立爱灵敦理念书院，致力於洛书的数学研究，发表论文 3 篇。到 1990 年 10 月，笔者参加在河南省安阳市召开的国际周易与自然科学讨论会后，乃作易卦的数学研究，当即发现易卦阴阳符号系统与现代数学中的实虚复数系统存在着一与一的对应关系，乃即建立了焦氏《周易宇宙代数学》。

本文是第一次向中国及世界学者介绍《周易宇宙代数学》，仅能涉及"易代数"的定义、公理、特质、代数操作及基本函数等基础部分。

二、阴、阳与易的代数定义之内涵

1. 焦氏"阴或阴爻之代数定义"

阴或阴爻的代数定义包括三方面：(1)阴或阴爻的代数符号表作 X 或 x。(2)建立阴数的数域为实数域。(3)阴数的数值单位定义为实数单位，表作 $Re=\sqrt{1}=\pm 1$。由此可知阴数即为代数

中的实数。当阴数只用实数域中的整数时，吾人可用参数 a 以代变数 x。

2. 焦氏“阳或阳爻之代数定义”

阳或阳爻的代数定义包括三方面：(1)阳或阳爻的代数符号表作 Y 或 y；(2)建立阳数的数域为虚数域；(3)阳数的数值单位定义为虚数单位，表作 $I_m=\sqrt{-1}=\pm i$。由此可知阳数即为代数中的虚数，一个阳数必须表作 Yi 或 yi。当阳数只用实数域中的整数时，吾人可用参数 b 以代变数 y。

3. 焦氏“易数或易卦之代数定义”

易卦或易数的代数定义包括三方面：(1)易卦或易数的代数符号表作 Z 或 z，即复数符号；(2)建立易卦或易数的数域为复数域；(3)易卦由阴、阳两爻合成，易数由实数与虚数合成。由此可知易卦或易数即为代数中的复数，一阴一阳之谓易的代数方程式即为 $Z=X+Yi$(或 $z=x+yi$)。当吾人只用实数域中的整数时，易卦或易数就是整数复数，用参数 C 或 c 代变数 Z 或 z，表作 $c=a+bi$。

根据上述阴、阳与易的代数定义，作者将易卦符号系统中的一切性质和运算均可与代数中的复数的性质与运算直接挂钩，而周易代数学亦就对应于现代数学中的复数代数学。

三、周易宇宙代数学的三个基本公理

公理 1

建立易卦(数)阴(实)阳(虚)二重性的代数多项式为：

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z^1+a_0z^0 \tag{1}$$

式中 $z=2$，$n=0$，1，2，3…，a_i 可为阴爻--（实数 X）或阳爻—（虚数 Y）。

公理 1 中的二进制代数多项式可用来判定不同数位的阴阳符号（实虚二数）的系数值，并得出两者的总和，式中 n 表卦系的爻数或易数系的幂数。现以数例说明公理 1 的应用如下：

［例一］陰爻的複數式作法：– – $=x=2^0x=x+0y=(1+0i)$

［例二］陽爻的複數式作法：—— $=y=2^0y=0x+1y=(0+1i)$

［例三］三爻艮卦的複數式：☶ $=XXY=2^2x+2^1x+2^0y=6x+y=(6+1i)$

［例四］六爻乾卦的複數式：䷀ $=YYYYYY=2^5y+2^4y+2^3y+2^2y+2^1y+2^0y=32y+16y+8y+4y+2y+y=63y=0X+63y=(0+63i)$

公理 2

易卦（数）的衍生及其阴、阳两爻（实、虚两数）的组合、排列和结构都遵照二项式公式：

$$(x+y)^n=x^n+\frac{n}{1!}x^{(n-1)}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{(n-2)}y^2+\cdots+nxy^{n-1}+y^n \tag{2}$$

式中 x 表阴爻（实数），y 表阳爻（虚数），n 为正整数。

二项式的展开式中共含有 $(n+1)$ 项，每项的系数均符合排列与组合的公式，例如第 $(r+1)$ 项的系数为：

$$nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}=nC_{n-r}。 \tag{2.1}$$

就易卦说，式中 n 表卦系中之爻数，每一卦系所含卦数为 2^n，可分组为 $(n+1)$ 项，例如六爻卦系中 $n=6$，卦系中共含 $2^6=64$ 卦，可分成 $6+1=7$ 项，第 $(r+1)$ 项即表为 $nC_rx^{n-r}y^r$。吾人可用二项式定理解析易卦的各种结构与特质，并将符号关系表成数值关系。现再将三爻卦系(Trigrams)及六爻卦系(Hexagtams)的二项式展开为(2.2)，(2.3)两式，读者不难看出式中

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= x^3+\frac{3}{1!}x^2y+\frac{3\cdot 2}{2!}xy^2+y^3 \\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^6 &= x^6+\frac{6}{1!}x^5y+\frac{6\cdot 5}{2!}x^4y^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}x^3y^3 \\
&\quad +\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}x^2y^4+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!}x^1y^5 \\
&\quad +\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6!}y^6 \\
&= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4 \\
&\quad +6xy^5+y^6。 \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

x(阴)与 y(阳)的对称、置换与守恒关系；如将六十四卦排列成 8×8 方阵(图 7—1)，更可检查出阴、阳两爻的全部交错关系、交综关系，以及错综对称性。

公理 3

易卦(数)阴(实)阳(虚)体系组合成一个具有二重性的集合表作为：

$$Z_n=\left\{\sum_{k=1}^{2^n}(X_{re}+Y_{im})_{ki}\,|X|+|Y|=2^n-1\right\} \qquad (3)$$

式中 $n=0, 1, 2, \cdots$，表卦系之爻数(易数之维数)，$k=1, 2, 3\cdots 2^n$ 表卦系中的卦序(易数集的数序)，X 与 Y 均为实数，re 表实数单位 $\sqrt{1}$，im 表虚数单位 $\sqrt{-1}$，X 与 Y 必须满足实虚二重性关系 $|X|+|Y|=2^n-1$。吾人名 Z_n 曰易数集(Set of Yi numbers)。

爻數 n	卦系	卦數 2^n	卦名	陰陽符號	代數符號	二進制符號式	複數式 $x+yi$	二重性關系 $\|x\|+\|y\|=2^n-1$
0	太極	1	太極	☯	(0,0)	$ox+oy$	$(0+0i)$	$x+y=0$
1	兩儀	2	陰爻	⚋	XO	2^0x+oy	$(1+0i)$	
			陽爻	⚊	OY	$ox+2^0y$	$(0+1i)$	$x+y=1$
2	四象	4	太陰	⚏	XX	2^1x+2^0x	$(3+0i)$	
			少陽	⚎	XY	2^1x+2^0x	$(2+1i)$	
			少陰	⚍	YX	2^1y+2^0x	$(1+2i)$	
			太陽	⚌	YY	2^1y+2^0y	$(0+3i)$	$x+y=3$
3	八卦	8	坤	☷	XXX	$2^2x+2x+2^0x$	$(7+0i)$	
			艮	☶	XXY	$2^2x+2^1x+2^0y$	$(6+1i)$	
			坎	☵	XYX	$2^2x+2^1y+2^0x$	$(5+2i)$	
			巽	☴	XYY	$2^2x+2^1y+2^0y$	$(4+3i)$	
			震	☳	YXX	$2^2y+2^1x+2^0x$	$(3+4i)$	
			離	☲	YXY	$2^2y+2^1x+2^0y$	$(2+5i)$	$x+y=7$
			兑	☱	YYX	$2^2y+2^1x+2^0y$	$(1+6i)$	
			乾	☰	YYY	$2^2y+2^1y+2^0y$	$(0+7i)$	
6	六爻卦系	64			從略			$x+y=63$

表 7-1 易卦阴阳符号体系之复数表示方程式

吾人可用数学归纳法证明公理 3，由 $n=1$ 之两仪到 $n=6$ 之六爻卦系，均符合此 Z_n 之特质。例如三爻卦系所生八卦的集合即可表为：

$$Z_3=\begin{Bmatrix}\underset{k=1}{(7+0\overset{\text{坤}}{i})}, & \underset{k=2}{(6+1\overset{\text{艮}}{i})}, & \underset{k=3}{(5+2\overset{\text{坎}}{i})}, & \underset{k=4}{(4+3\overset{\text{巽}}{i})}, \\ \underset{k=5}{(3+4\overset{\text{震}}{i})}, & \underset{k=6}{(2+5\overset{\text{离}}{i})}, & \underset{k=7}{(1+6\overset{\text{兑}}{i})}, & \underset{k=8}{(0+7\overset{\text{乾}}{i})}\end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

在 Z_3 中 $n=3$，共含 $2^3=8$ 卦，卦序由坤为第一卦到乾为第八卦，其中坤与乾、艮与兑、坎与离、巽与震互为二重性，符合 $X+Y=2^3-1=7$ 之关系。

四、八卦系统之复数式与六爻卦系之复数式矩阵图

根据周易代数学之定义与公理，吾人可将八卦阴阳符号体系之复数表示方程式总合一起，如表 7－1。

吾人根据上述公理及表 7—1，当可谱出六爻卦系中六十四卦之复数式，并将其排列成一个 8×8 矩阵，如图 7—1 所示。当只就阴阳两爻关系分析时，读者立可检验出易卦体系为一封闭的阴阳循环系统，其中阴与阳必须遵守置换、平衡、对称与守恒定律，但与用复数代数关系分析时，则易数衍生的线性关系，实虚二重性关系，以及实虚二部分的互质，因子分解，几何结构，及函数关系等，就组成一部繁复的周易代数学，远非本文所能包括。作者现只根据矩阵代数学，并用二重序偶 (x, y) 代表复数 $z=x+yi$，将六爻卦系的复数矩阵的结构经过数字解析(numerical analysis)，归纳出周易复数空间的两大构成原理如下：

1. 易卦(数)阴(实)阳(虚)二重性的整体性原理(The Integrity Principle of The Xin-Yang Duality)：六爻卦系的复数矩阵 $[Z_{ij}]_{8\times 8}$ 是由其实数矩阵 $[X_{ij}]8\times 8$ 和虚数矩阵 $i[Y_{ij}]8\times 8$ 相加而成，其展开式为：

1 坤 (63+0i)	2 剥 (62+1i)	3 比 (61+2i)	4 觀 (60+3i)	5 豫 (59+4i)	6 晉 (58+5i)	7 萃 (57+6i)	8 否 (56+7i)
9 謙 (55+8i)	10 艮 (54+9i)	11 蹇 (53+10i)	12 漸 (52+11i)	13 小過 (51+12i)	14 旅 (50+13i)	15 咸 (49+14i)	16 遁 (48+15i)
17 師 (47+16i)	18 蒙 (46+17i)	19 坎 (45+18i)	20 渙 (44+19i)	21 解 (43+20i)	22 未濟 (42+21i)	23 困 (41+22i)	24 訟 (40+23i)
25 升 (39+24i)	26 蠱 (38+25i)	27 井 (37+26i)	28 巽 (36+27i)	29 恒 (35+28i)	30 鼎 (34+29i)	31 大過 (33+30i)	32 姤 (32+31i)
33 復 (31+32i)	34 頤 (30+33i)	35 屯 (29+34i)	36 益 (28+35i)	37 震 (27+36i)	38 噬嗑 (26+37i)	39 隨 (25+38i)	40 無妄 (24+39i)
41 明夷 (23+40i)	42 賁 (22+41i)	43 既濟 (21+42i)	44 家人 (20+43i)	45 豐 (19+44i)	46 離 (18+45i)	47 革 (17+46i)	48 同人 (16+47i)
49 臨 (15+48i)	50 損 (14+49i)	51 節 (13+50i)	52 中孚 (12+51i)	53 歸妹 (11+52i)	54 睽 (10+53i)	55 兑 (9+54i)	56 履 (8+55i)
57 泰 (7+56i)	58 大畜 (6+57i)	59 需 (5+58i)	60 小畜 (4+59i)	61 大壯 (3+60i)	62 大有 (2+61i)	63 夬 (1+62i)	64 乾 (0+63i)

图 7-1　六爻卦系中六十四卦之复数矩阵

$$
\begin{bmatrix}
(63,0) & (62,1) & \cdots & (57,6) & (56,7) \\
(55,8) & (54,9) & \cdots & (49,14) & (48,15) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(15,48) & (14,49) & \cdots & (9,54) & (8,55) \\
(7,56) & (6,57) & \cdots & (1,62) & (0,63)
\end{bmatrix}_{8\times 8}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
63 & 62 & \cdots & 57 & 56 \\
55 & 54 & \cdots & 49 & 48 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
15 & 14 & \cdots & 9 & 8 \\
7 & 6 & \cdots & 1 & 0
\end{bmatrix}_{8\times 8}
+i\begin{bmatrix}
0 & 1 & \cdots & 6 & 7 \\
8 & 9 & \cdots & 14 & 15 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
48 & 49 & \cdots & 54 & 55 \\
56 & 57 & \cdots & 62 & 63
\end{bmatrix}_{8\times 8} \qquad (4)
$$

恒等式(4)示出周易复数系统中实虚二重性的数字解析，其重要特质为(1)整个方阵形成为一个透过中心点的实虚两部相互交换的对称系统(Inversion Symmetry)；(2)易数的实虚两部的组成元素是由相同的自然数集按照相反的升降序列组成，每相邻两数间的公差为1；(3)易数集构成一个有序的，可数的无穷复数系统。根据(4) 式吾人可推导出易数集与实数集的相互对应关系有：①自然数集是构成实数域的基础子集，易数集是构成复数域的基础子集；②自然数的算术运算衍生出实数体系，易数的算术运算衍生出复数体系；③实数只能位于实数线上，点与数可互为置换；易数只能位于乾坤线上，点与数可互为置换。作者称(4)式及其数学性质曰易卦(数)阴(实)阳(虚)二重性的整体性原理。

根据上述公理1与3，易数实虚二重性整体原理可表示如下：

$$(|x|+|y|)_n=2^n-1,\ (n=0,1,2,\cdots) \qquad (5)$$

吾人可简称(5)式曰焦氏易数定则。

2. 周易复数空间的线性结构原理(The Linear Structure of the Zhou-Yi Complex Space)

根据六爻易数矩阵(图7－1)的数字解析或(4)式可知：易数

矩阵[C]并非[A]与[B]的矩阵乘积，而是[A]与[B]的线性组合，符合线性方程式[C]$=m$[A]$+$[B]，m 之值需由公理 1 所述之二进制爻位系数定则决定。作者再将公理 1 的线性结构内涵叙述谓："在易卦序列中，第 n 位爻符之系数值等于其余所有各位爻符之系数值之和加 1，即：

$$2^n=\sum_{k=0}^{n-1}2^k+1,\ (n=0,\ 1,\ 2,\cdots\ \infty) \tag{6}$$

作者称(6)式为焦氏易数空间线性结构原理式。(5)式与(6)式实为同体异形式。

应用上述原则可知，二爻卦系之四象系由上下两仪线性组合而成，m 之值为 2，例如少阳为上阳下阴组成，即(2，1)＝2(1，0)＋(0，1)，(见表 7－1)。八卦为三爻卦系，下卦 A 为两仪，上卦 B 为四象，其线性组合式为 $C=2(A)+(B)$，例如坤卦为(7，0)＝2(3，0)＋(1，0)；坎卦为(5，2)＝2(2，1)＋(1，0)；乾卦为(0，7)＝2(0，3)＋(0，1)等。

六爻卦系为八卦相互组合而成，其线性公式为 $C=8(A)+(B)$，在其复数矩阵(图 7－1)中，主对角线为八卦之自重卦，符合 $c=8A+B=9A$，例如六爻坤卦为三爻坤卦之 9 倍，即(63，0)＝9(7，0)，与其二重性之乾卦自为(0,63)＝9(0,7)。从对角线系由互为二重性之八卦组成，所成易数均含公因数 7，例如'恒'为(35，28)＝8(4，3)＋(3，4)＝7(5，4)，与其二重性之'益'为(28，35)＝8(3，4)＋(4，3)＝7(4，5)。总之，读者可求出图 7－1 中任一易数均符合一般线性组合公式 $C=mA+nB$，再用对应系数法定出 $m=8$，$n=1$，完全符合易数空间的线性结构原理。

五、太极之数学定义与操作

易以太极为中心，为建元，其主旨是"乾、坤一太极。"太极

是道，是本体，易文曰："一阴一阳之谓道"。太极是元始的一，绝对的一，可以作为一切数量和秩序的单位，在易文中通称"大一"或"天一"。将这些逻辑和哲学意义及太极体系的建立和现代数学理论相互对证，作者认为太极的数学定义有三：①按照数论，太极是数系{2^n：$n=0$，1，2，…}的开端，即 $2^0=1$。②按照代数，太极是二进制阴阳符号系统的构成单元，作者定义阴代表实数单位 $Re=\sqrt{1}=\pm 1$，阳代表虚数单位 $\mathrm{Im}=\sqrt{-1}=\pm i$。③按照几何，实数平面 R^2 可以延伸为复数平面 C，作者将太极认作为复数平面上半径为 1 的单位圆，如图 7－2 所示，这个单位圆的 X 轴为实轴，Y 轴为虚轴，复数多项式 $Z^n-1=0$ 的解都位于此圆周上面。

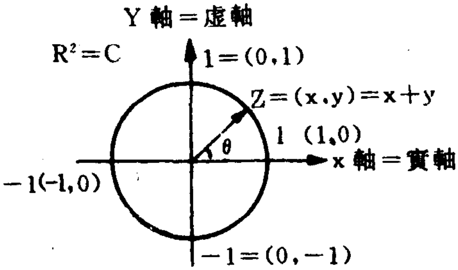


图 7-2 复数平面中之单位圆

太极的运作就引起"易"的变化，"易"者变也，根据《易纬干乾凿度》的注释称："易一名而含三义：所谓易也，变易也，不易也。"所谓易与变易当指变化之现象，所谓不易当指变化之数理，根据复数之几何特质，作者将太极或易之数学操作区分为四类，简述如下：

1. 极化

任一复数矢量 $z(a,b)=a+bi$ 是由其长度 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 和方

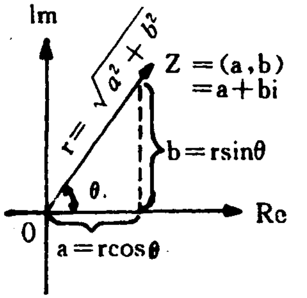


图 7-3　复数之极坐标轴系

位角 $\mathrm{tg}\theta=b/a$ 构成，如图 7-3 所示，吾人称 r 为 z 之绝对值，表作 $|z|$；称 θ 为幅角(argument)，表作 $\theta=\arg z$，根据三角关系，z 之实数部分为 $a=r\cos\theta$，虚数部分为 $b=r\sin\theta$。因之，z 之极坐标式就成 $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，亦即矢量 z 被极化为相互垂直的阴或实与阳或虚两部分，θ 之值一般限定在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 之间，但 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 均为周期函数，故当 θ 增加 2π 之倍数时，矢量 z 仍不变动。

2. 转动(Rotation)

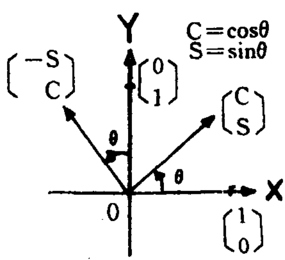


图 7-4　矢量之转动

太极单位圆的 4 个基矢为(1，i，-1，$-i$)，此 4 数构成一个乘法群，i 的几何意义就是绕圆心沿反时针方向作 90°的旋转。例如从点 1 开始，$1\times i=i$，$i\times i=i^2=-1$，$-1\times i=-i$，$-i\times i=-(i)^2=1$，完成一转动周期。就整个 $X-Y$ 平面说，每一矢量受到一转动矩阵的作用，即生出绕原点的转动，如图 7-4 所示，图中示出两个基矢转动 θ 角度之变化，第一基矢(1，0)转变为($\cos\theta$，$\sin\theta$)，第二基矢(0，1)转变为($-\sin\theta$，$\cos\theta$)。由此得出转动之矩阵式为 $R_\theta=\begin{bmatrix}\cos & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，例如当 $\theta=90°$时，$R_\theta=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，图中$\begin{bmatrix}c\\ s\end{bmatrix}$即转变成$\begin{bmatrix}-s\\ c\end{bmatrix}$。

3. 反射(Reflection)

反射之意义乃指一矢量经过镜面反射所成之像，例如以矢量(x，y)说，当以 X 轴为镜面反射时，则转变为(x，$-y$)，当以 Y 轴为镜面反射时，则转变为($-x$，y)。在 $X-Y$ 面内，当以幅角为 θ 之直线为镜面时，反射作用之几何特质及反射矩阵之形成如图 7—5 所示。图中示出两个基矢(1，0)与(0，1)透过 θ 直线镜面

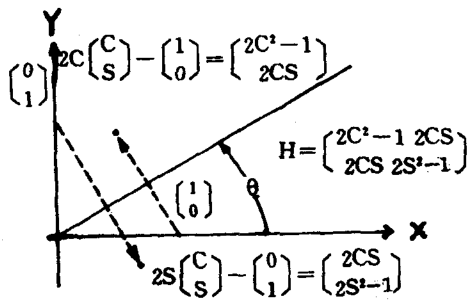


图 7-5　矢量透过 θ 直线镜面之反射

之反射，并得出反射之矩阵公式 H。反射之几何特质有两：一为

矢量之长度在反射中为不变值，一为反射之逆作用仍为反射自身，即 $H=H^{-1}$，亦即 $H^2=1$。

4. 投影(Projection)

在 $X-Y$ 平面内，由矢量 OP 之终点 P 到 OX 轴上引一垂线 PQ，所得矢量 OQ 即为 OP 在 x 轴上之投影。投影结果，OP 即由二维平面中的一点(x,y)变为一维轴线上的一点$(x,0)$，故投影矩阵操作到一矢量空间可令空间的维数减低，故投影为一不可逆操作。投影之几何特质及投影矩阵 P 之形成，仍可以两个基矢$(1,0)$与$(0,1)$在幅角为 θ 之直线上之投影说明之，如图 7-6 所示。

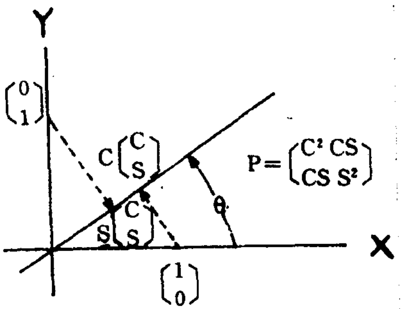


图 7-6　矢量在 θ 直线上之投影

总之，太极的几何操作即生成“易”的转变，可能延伸到整个太极体系。每一太极转变皆可以一转变矩阵[A]表示，吾人只要定出 A 对构成太极空间的每一基矢 x 的作用效果 Ax，则整个太极空间内每一矢量都生出相同的 Ax 效果，这一理则就是“易”中“不易”。

六、八卦之代数运算与几何性质

易数即复数的关系既然奠定，则易数的一切性质与运算将类

同于复数。为研究“周易宇宙代数学”读者宜先参阅复数代数学。在现代数学中，复数集涵盖着其他一切数集，而复函数亦联系着三角函数与指数函数，故有复数中的基本关系式：$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$，由此基本关系式可再推导出复数的其他代数运算。各卦在复数面中的几何图形如图 7-7 所示。

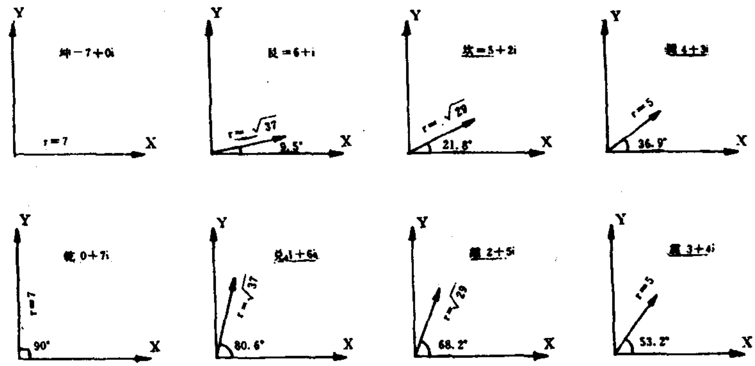


图 7-7　八卦的复矢量

易数既是复数，根据复数代数学，易数就是复数平面中的二维矢量，一般表作 $z=a+bi=(a, b)$ 或 $w=x+yi=(x, y)$，根据矢量代数学，我们可推导出 z 和 w 间的各种函数关系，作者现先将八卦间的加、减、乘、除的结果，列成下面 4 个方阵，并解析其结构如下：

1. 八卦之和

八卦之和为：$z+w=(a+bi)+(x+yi)=(a+x)+i(b+y)$　　(7)

十	坤 ☷ (7,0)	艮 ☶ (6,1)	坎 ☵ (5,2)	巽 ☴ (4,3)	震 ☳ (3,4)	離 ☲ (2,5)	兑 ☱ (1,6)	乾 ☰ (0,7)
地 ☷ (7,0)	2 (7,0)	(13,1)	2 (6,1)	(11,3)	2 (5,2)	(9,5)	2 (4,3)	(7,7)
山 ☶ (6,1)	(13,1)	2 (6,1)	(11,3)	2 (5,2)	(9,5)	2 (4,3)	(7,7)	2 (3,4)
水 ☵ (5,2)	2 (6,1)	(11,3)	2 (5,2)	(9,5)	2 (4,3)	(7,7)	2 (3,4)	(5,9)
風 ☴ (4,3)	(11,3)	2 (5,2)	(9,5)	2 (4,3)	(7,7)	2 (3,4)	(5,9)	2 (2,5)
雷 ☳ (3,4)	2 (5,2)	(9,5)	2 (4,3)	(7,7)	2 (3,4)	(5,9)	2 (2,5)	(3,11)
火 ☲ (2,5)	(9,5)	2 (4,3)	(7,7)	2 (3,4)	(5,9)	2 (2,5)	(3,11)	2 (1,6)
澤 ☱ (1,6)	2 (4,3)	(7,7)	2 (3,4)	(5,9)	2 (2,5)	(3,11)	2 (1,6)	(1,13)
天 ☰ (0,7)	(7,7)	2 (3,4)	(5,9)	2 (2,5)	(3,11)	2 (1,6)	(1,13)	2 (0,7)

表 7-2　八卦之和方阵

解析：(1)八卦之和方阵为一对阵称方阵，即 $z_{ij}=z_{ji}$，如表 7—2 所示。

(2)八卦加法符合交换律：$z+w=w+z$。

(3)主对角线上之元素示出同卦相加，符合：$w+w=2w$；$z+z=2z$。

(4)从对角线上之元素示出互为二重性之卦之和皆为(7，7)=7(1，1)。

(5)八卦加法之二重性关系为：$x+y=14$。

(6)巽卦(4，3)与震卦(3，4)互为二重性，两者各占 7 卦如下：

(a)坤(地)+兑(泽)=艮(山)+离(火)=震(雷)+坎(水)=2 巽(风)=2(4，3)。

(b)乾(天)+艮(山)=兑(泽)+坎(水)=巽(风)+离(火)=2 震(雷)=2(3，4)。

(7)坎卦(5，2) 与离卦(2，5)互为二重性，两者各占 5 卦如下：

(a)坤(地)+震(雷)=艮(山)+巽(风)=2 坎(水)=2(5，2)。

(b)乾(天)+巽(风)=兑(泽)+震(雷)=2 离(火)=2(2，5)。

(8)艮卦(6，1)与兑卦(1，6)互为二重性，两者各占 3 卦如下：

(a)坤(地)+坎(水)=2 艮(山)=2(6，1)。

(b)乾(天)+离(火)=2 兑(泽)=2(1，6)。

(9)八卦加法生出(9，5)与(5，9)互为二重性之新卦，两者各占 6 卦如下：

(a)坤(地)+离(火)=艮(山)+震(雷)=巽(风)+坎(水)=(9，5)。

(*b*)乾（天）＋坎（水）＝兑（泽）＋巽（风）＝震（雷）＋离（火）＝（5，9）。

（10）八卦加法生出（11，3）与（3，11）互为二重性之新卦，两者各占 4 卦如下：

(*a*)坤（地）＋巽（风）＝艮（山）＋坎（水）＝（11，3）。

(*b*)乾（天）＋震（雷）＝兑（泽）＋离（火）＝（3，11）。

（11）八卦加法生出（13，1）与（11，3）互为二重性之新卦，两者各占 2 卦，如下：

(*a*)坤（地）＋艮（山）＝（13，1）。

(*b*)乾（天）＋兑（泽）＝（1，13）。

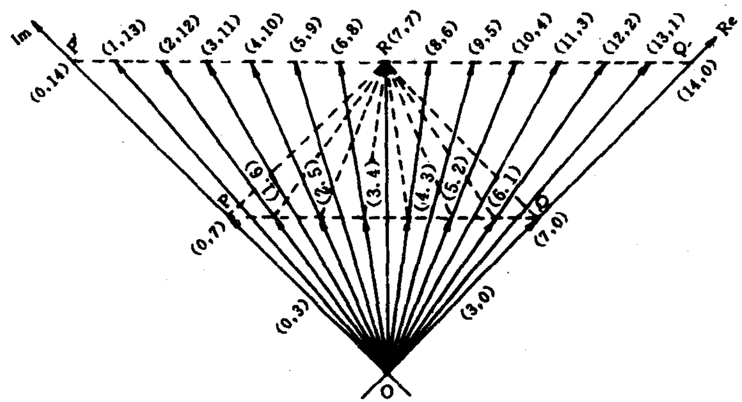


图 7-8　八卦之和的几何图形

(12)八卦加法之几何表示方法如图 7-8 所示(按正常位置转动 45°)。图中示出互为二重性的八卦矢量之终点全位于联系乾卦(0，7)与坤卦(7，0)之直线 PQ 上，作者称此乾坤直线为卦位线。按照矢量加法，天与地、山与泽、水与火、风与雷 4 对互为二重性卦之和均为矢量 $OR(7，7)$。

2. 八卦之差

八卦之差为：$w-z=(x+yi)-(a+bi)=(x-a)+i(y-b)$ (8)

解析：(1)八卦之差方阵为一互为二重性的对称方阵，如表 7-3 所示。

(2)八卦减法符合 $w-z=-(z-w)$，例如(地－山)＝－(山－地)。

(3)主对角线上之元素示出同卦相减，合于 $w-w=0$，$z-z=0$。

(4)八卦减法之二重性关系为 $x+y=0$。

(5)八卦减法生出(1，－1)与(－1，1)二重性关系者有如下 7 对：

地与山，山与水，水与风，风与雷，雷与火，火与泽，泽与天。

(6)八卦减法生出(2，－2)与(－2，2)二重性关系者有如下 6 对：

地与水；水与雷，雷与泽，山与风，风与火，火与天。

(7)八卦减法生出(3，－3)与(－3，3)二重性关系者有如下 5 对：

地与风，风与泽，水与水，山与雷，雷与天。

(8)八卦减法生出(4，－4)与(－4，4)二重性关系者有如下 4 对：

−	坤 ☷ (7,0)	艮 ☶ (6,1)	坎 ☵ (5,2)	巽 ☴ (4,3)	震 ☳ (3,4)	離 ☲ (2,5)	兑 ☱ (1,6)	乾 ☰ (0,7)
☷ 地(7,0)	(0,0)	(−1,1)	(−2,7)	(−3,3)	(−4,4)	(−5,5)	(−6,6)	(−7,7)
☶ 山(6,1)	(1,−1)	(0,0)	(−1,1)	(−2,2)	(−3,3)	(−4,4)	(−5,5)	(−6,6)
☵ 水(5,2)	(2,−2)	(1,−1)	(0,−0)	(−1,1)	(−2,2)	(−3,3)	(−4,4)	(−5,5)
☴ 風(4,3)	(3,−3)	(2,−2)	(1,−1)	(0,0)	(−1,1)	(−2,2)	(−3,3)	(−4,4)
☳ 雷(3,4)	(4,−4)	(3,−3)	(2,−2)	(1,−1)	(0,0)	(−1,1)	(−2,2)	(−3,3)
☲ 火(2,5)	(5,−5)	(4,−4)	(3,−3)	(2,−2)	(1,−1)	(0,0)	(−1,1)	(−2,2)
☱ 澤(1,6)	(6,−6)	(5,−5)	(4,−4)	(3,−3)	(2,−2)	(1,−1)	(0,0)	(−1,1)
☰ 天(0,7)	(7,−7)	(6,−6)	(5,−5)	(4,−4)	(3,−3)	(2,−2)	(1,−1)	(0,0)

表 7-3　八卦之差方阵

地与雷，山与火，水与泽，风与天。

(9)八卦减法生出(5，－5)与(－5，5)二重关系者有：地与火，山与泽，水与天。

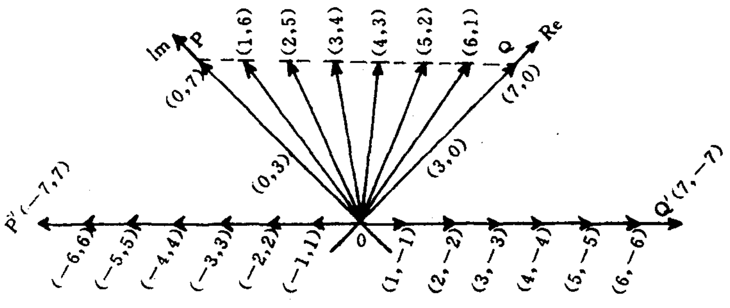


图 7-9 八卦之差的几何图形

(10)八卦减法生出(6，－6)与(－6，6)二重关系者有：地与泽，天与山。

(11)八卦减法生出(7，－7)与(－7，7)二重关系者为天与地。

(12)八卦之差的几何表示如图 7-9 所示。八卦矢量之终点均位于坤乾直线 PQ 上，按照矢量减法，八卦相减所生之差矢量均位于关系互为二重性之点(－7，7)与点(7，－7)之直线 $P'Q'$ 上，$P'Q'$ 与 PQ 平行。

3. 八卦之积

八卦之积为：$wz=(a+bi)\cdot(x+yi)=(ax-by)+i(ay+bx)$ (9)

×	坤 ☷	艮 ☶	坎 ☵	巽 ☴	震 ☳	離 ☲	兑 ☱	乾 ☰
	(7,0)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(3,4)	(2,5)	(1,6)	(0,7)
☷ 地(7,0)	(49,0)	(42,7)	(35,14)	(28,21)	(21,28)	(14,35)	(7,42)	(0,49)
☶ 山(6,1)	(42,7)	(35,12)	(28,17)	(21,22)	(14,27)	(7,32)	(0,37)	(−7,42)
☵ 水(5,2)	(35,14)	(28,17)	(21,26)	(14,23)	(7,26)	(0,29)	(−7,32)	(−14,35)
☴ 風(4,3)	(28,21)	(21,22)	(14,23)	(7,24)	(0,25)	(−07,26)	(−14,27)	(−21,28)
☳ 雷(3,4)	(21,28)	(14,27)	(7,26)	(0,25)	(−7,24)	(−14,23)	(−21,22)	(−28,21)
☲ 火(2,5)	(14,35)	(7,32)	(0,29)	(−7,26)	(−14,23)	(−21,20)	(−28,17)	(−35,14)
☱ 澤(1,6)	(7,42)	(0,37)	(−7,32)	(−14,27)	(−21,22)	(−28,17)	(−35,12)	(−42,7)
☰ 天(0,7)	(0,49)	(−7,42)	(−14,35)	(−21,28)	(−28,21)	(−35,14)	(−42,7)	(−49,0)

表 7-4　八卦之积方阵

解析：(1)八卦之积方阵为一对称方阵，如表 7-4 所示。

(2)八卦乘法符合交换律：$z \cdot w = w \cdot z$。

(3)主对角线上之元素示出各卦自乘这积为 $z \cdot z = z^2 = (a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi$，形成一组以虚轴为镜面所反射的对称矢量$(x, y)$和$(-x, y)$。

(4)从对角线上之元素示出天与地、山与泽、水与火、风与雷 4 对互为二重性之卦之积符合$(a+bi)(b+ai)=0+(a^2+b^2)i$，即积为(0，25)，(0，29)，(0，37)与(0，49)，均位于虚轴上面。

(5)在八卦乘法中，地卦等于实数因子 7，任何卦与地卦相乘之积即等于该卦之 7 倍。

(6)在八卦乘法中，天卦等于虚数因子 $7i$，任何卦$(a+bi)$与天卦相乘之积都等于$(-7b+7ai)=7(-b+ai)$。

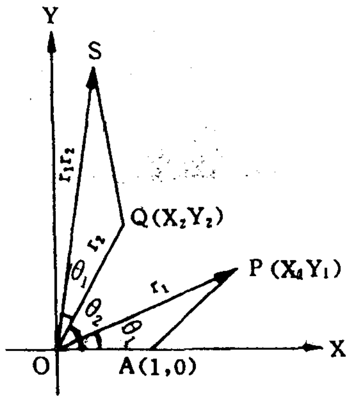


图 7-10

(7)在八卦积方阵中共含 64 卦，除方阵四边及两对角上之卦(共 40)合乎以上关系外，其他 24 卦均符合以虚轴为镜面的反射对称关系(a, b)与$(-a, b)$。

(8)八卦乘法之几何表示可由八卦矢量之极坐标(r, θ)求得，如图 7-10 所示：

设 $z_1=(x_1+iy_1)=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=(x_2+iy_2)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则 $z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$，在复数平面中，根据几何关系，三角形 OAP 与三角形 OQS 相似，故 z_1 与 z_2 相乘之积 z_1z_2 为点 s，并得出 $|z_1z_2|=os\text{-}=r_1r_2=|z_1z_2|$ 和 $\arg z_1z_2=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$，亦即积矢量之长度为两矢量长度之积，积矢量之幅角为两矢量幅角之和。图 7-11 示出八卦之积的几何图形。

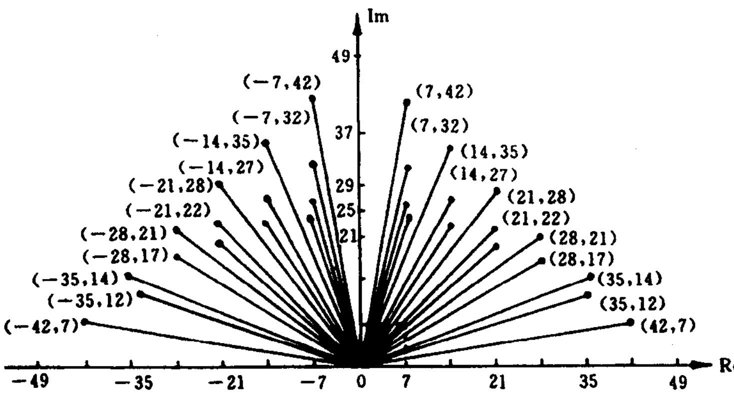


图 7-11　八卦之积的几何图形

4. 八卦之商

八卦之商为：$w/z=w\cdot z^{-1}=(x+yi)(a+bi)^{-1}$

$$=(x+yi)\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{(ax+by)+i(ay-bx)}{a^2+b^2} \quad (10)$$

÷	坤 ☷ (7,0)	艮 ☶ (6,1)	坎 ☵ (5,2)	巽 ☴ (4,3)	震 ☳ (3,4)	離 ☲ (2,5)	兑 ☱ (1,6)	乾 ☰ (0,7)
☷ 地(7,0)	(1,0)	$\frac{(42,7)}{49}$	$\frac{(35,14)}{49}$	$\frac{(28,21)}{49}$	$\frac{(21,28)}{49}$	$\frac{(14,35)}{49}$	$\frac{(7,42)}{49}$	$\frac{(0,49)}{49}$
☶ 山(6,1)	$\frac{(42,7)}{37}$	(1,0)	$\frac{(32,7)}{37}$	$\frac{(27,14)}{37}$	$\frac{(22,21)}{37}$	$\frac{(17,28)}{37}$	$\frac{(12,35)}{37}$	$\frac{(7,42)}{37}$
☵ 水(5,2)	$\frac{(35,-14)}{29}$	$\frac{(32,-7)}{29}$	(1,0)	$\frac{(26,7)}{29}$	$\frac{(23,14)}{29}$	$\frac{(20,21)}{29}$	$\frac{(17,28)}{29}$	$\frac{(14,35)}{29}$
☴ 風(4,3)	$\frac{(28,-21)}{25}$	$\frac{(27,-14)}{25}$	$\frac{(26,-7)}{25}$	(1,0)	$\frac{(24,7)}{25}$	$\frac{(23,14)}{25}$	$\frac{(22,21)}{25}$	$\frac{(21,28)}{25}$
☳ 雷(3,4)	$\frac{(21,-28)}{25}$	$\frac{(22,-21)}{25}$	$\frac{(23,-14)}{25}$	$\frac{(24,-7)}{25}$	(1,0)	$\frac{(26,7)}{25}$	$\frac{(27,14)}{25}$	$\frac{(28,21)}{25}$
☲ 火(2,5)	$\frac{(14,-35)}{29}$	$\frac{(17,-28)}{29}$	$\frac{(20,-21)}{29}$	$\frac{(23,-14)}{29}$	$\frac{(26,-7)}{29}$	(1,0)	$\frac{(32,7)}{29}$	$\frac{(35,14)}{29}$
☱ 澤(1,6)	$\frac{(7,-42)}{37}$	$\frac{(12,-35)}{37}$	$\frac{(17,-28)}{37}$	$\frac{(22,-21)}{37}$	$\frac{(27,-14)}{37}$	$\frac{(32,-7)}{37}$	(1,0)	$\frac{(42,7)}{37}$
☰ 天(0,7)	$\frac{(0,-49)}{49}$	$\frac{(7,-42)}{49}$	$\frac{(14,-35)}{49}$	$\frac{(21,-28)}{49}$	$\frac{(28,-21)}{49}$	$\frac{(35,-14)}{49}$	$\frac{(42,-7)}{49}$	(1,0)

表 7-5　八卦之商方阵

解析：(1)八卦之商方阵为一以实轴为镜面反射所形成的(a,b)与$(a,-b)$对称方阵，如表 7-5 所示。

(2)八卦除法符合 $Z/Z=Z\cdot Z^{-1}=1$ 与 $W/E=W\cdot Z^{-1}$。

(3)主对角上元素示出同卦相除之商为$(1,0)$。

(4)从对角上之元素示出互为二重性两卦相除之商形成以实轴为镜面的反射对称关系。

(5)在八卦除法中，地卦等于实数因子 7，任何卦以地卦相除，其商为该卦之 1/7，即 $Z/地=Z/7$。

(6)在八卦除法中，天卦等于虚数因子 $7i$，任何卦以天卦相除，其商为该卦之转变卦的$\frac{1}{7}$，即$\frac{Z}{7i}=\frac{(a+bi)}{7i}=\frac{1}{7}(b-ai)$。

(7)在八卦除法中，地卦被他卦相除之商为：$\frac{地}{Z}=\frac{7}{(a+bi)}=\frac{7(a-bi)}{a^2+b^2}$。

(8)在八卦除法中，天卦被他卦相除之商为$\frac{天}{Z}=\frac{7i}{(a+bi)}=\frac{7(b-ai)}{a^2+b^2}$。

(9)八卦除法之几何表示方法可由八卦矢量之极坐标(r,θ)求得，如图 7-12 所示，设 $Z_1=(x_1+iy_1)=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$Z_2=(x_2+iy_2)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$，在复数平面内，根据几何关系，三角形 OQA 与三角形 OPT 相似，故 Z_1 与 Z_2 相除之商 Z_1/Z_2 为点 T，并得出$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=OT=|Z_1|/|Z_2|$和 $\arg(\frac{Z_1}{Z_2})=\theta_1-\theta_2=\arg Z_1-\arg Z_2$，亦即商矢量长度为两矢量之长度之商，商矢量之幅角为两矢量幅角之差。

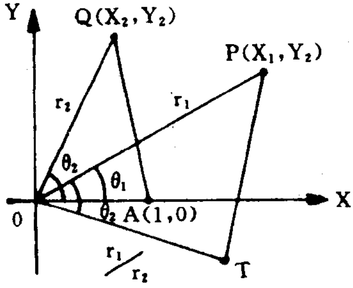


图 7-12

八卦之商的几何图形可示出所有商矢量之点的分布，如图 7-13 所示。各点皆符合以实轴为镜面所成反射之对称点。作者为了显示此一对称特点，故将实轴放在垂直方向，虚轴放在水平方向，则各商点均形成以点(1，0)为中心向外之分布。

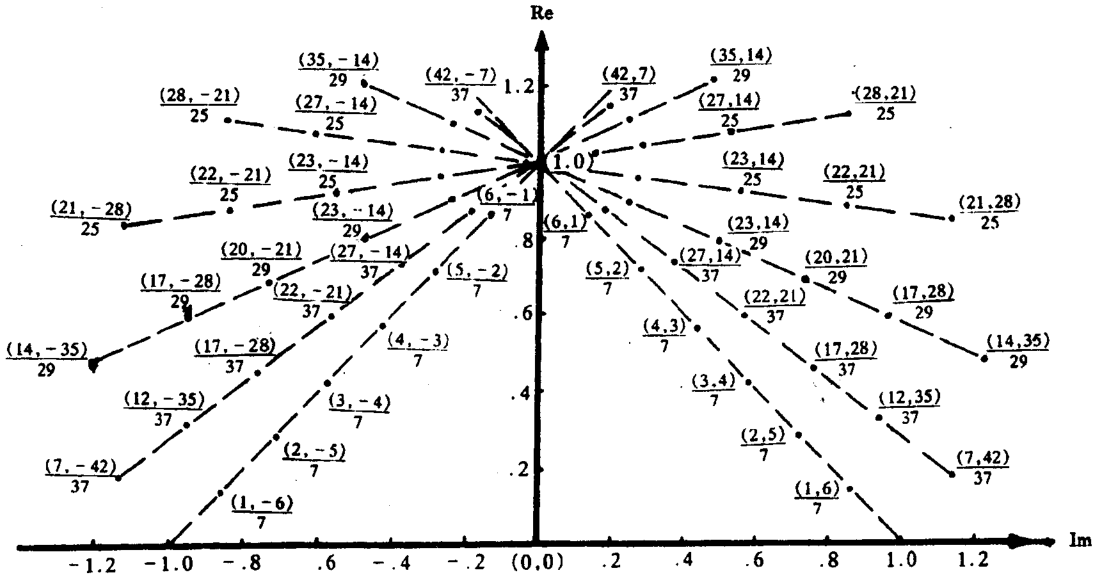


图 7-13　八卦之商的几何图形

七、八卦之基本复变函数(Elementary Complex Functions of the Trigrams)

1. 易数之复变函数转换

在数学发展史中，复数集(C)是由实数集(R)的扩展而成，而复数面(Z)亦就是实数面(R^2)的延伸，故而实函数的形成与转变原理亦可以延伸用于复函数，同理，易数既是复数，数学中复变函数的转换原则也可应用于易数。

在复数面中，每一易卦系统构成一个易数集并位于一定域(Domain)内。易数集中每个构成元(Element)都是一个复数 $C=a+bi$，它形成域内的一个点，或一个矢量，并可张成一个度量空间(Metric Space)。当将 C 作为变数时，其复函数式为 $Z=x+iy$，它的两个构成基底为实数 X 和 Y，当一复数域 Z 按照函数关系 F 转换(或映射)成为另一复数域 W，这个转换函数关系式表作 F: $Z\rightarrow W$，其意义就是 Z 域中的易数 Z 转换成 W 域中的对应易数 W，它的复数函数式为：

$$\begin{aligned} w &= u+iv=f(z)=f(x+iy) \\ &= f_1(x, y)+if_2(x, y) \end{aligned} \tag{12}$$

式中，函数 $f_1(x, y)$ 为复变函数 $f(z)$ 的实数部分，$f_2(x, y)$ 为其虚数部分。

复变函数的转换示例如图 7-14 所示，图中表示 $w=z^2=f(z)$ 的 $Z\rightarrow W$ 转换关系，$\because w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$；$\therefore u=x^2-y^2$，$v=2xy$。吾人选用 $u=1$ 和 $v=2$，则 $x^2-y^2=1$ 和 $xy=1$，此两式在 Z 平面中为双曲线。同理，$u=4$ 和 $v=8$ 在 Z 平面中亦为双曲线，如是则 Z 平面中之阴影区域转换为 W 平面中之阴影区域(如图 7-14 所示)。

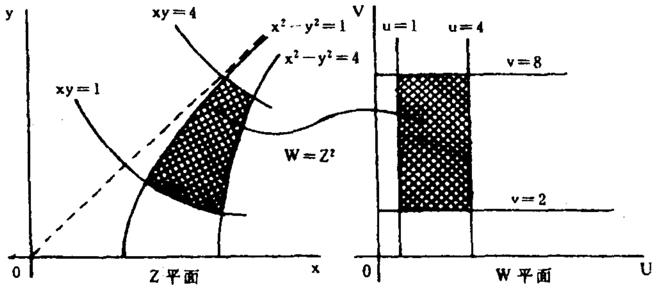


图 7-14　复变函数转换

需要指出，在复变函数 $f(z)$ 的作用下，如果一个点 $z(x, y)$ 只能生出一个对应的 $w(u, v)$ 时，吾人称 $f(z)$ 为单值函数，如果可生出多于一个解的 w 值时，则 $f(z)$ 为多值(multiple-valued)函数，但值得注意的是：$f(z)=z^2$ 虽为一单值函数，却不是一一对应的(因为 $f(-1)=f(1)$)。

易卦的复变函数转换，其领域浩瀚广大。本文限于篇幅，仅列出易数的若干基本复变函数，并以八卦为例表明，如下文所示。

2. 周易复变函数的二重性特质

作者根据现代复数代数学建立了周易宇宙代数学，两者间存在着相互对应(Correspondence)与恒等[Identity]关系，亦即易数就是复数，复数的构成特质有 2：(1)它是一个平面数，具有实数与虚数两部分；(2)建立复数的单位有 4，即实数单位 Re$=\sqrt{1}=\pm 1$ 和虚数单位 Im$=\sqrt{-1}=\pm i$，所以，每一个复数都可有 4 种表示，在复数代数学中，每一复数 $z=a+bi$ 都伴有一个共轭复

数(Complex Conjugate)，表作 $\bar{z}=a-bi$，两者的乘积等于该复数的绝对值的平方，即 $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$，此积为一实数，代表实数部分的值，周易复变函数的建立是准照实虚二重性关系，每一复数 $w=x+yi$ 都伴生一个二重复数[Complex Duality]，表作 $\tilde{w}=y+xi$，两者的乘积等于该复数的绝对值的平方，即 $w\tilde{w}=(x+yi)(y+xi)=(x^2,\ y^2)i$，此积为一虚数，代表虚数部分的值，作者用复数的共轭性与易数的二重性说明了两者的对应与恒等关系，现再将上面关系总称为周易复变函数的二重性特质，列成表 7-6，说明在复数面中，每一个复数可能有 8 个不同的转换式，组成易数二重性系统(表 7-7)。

现以八卦为例，说明复数面中两个互为可逆的 $Z\to W$ 与 $W\to Z$ 转换。

(1)设 $z=a+bi$，求解 $w=x+yi=f(z)=z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+(zab)i$。

[解]　由对应系数知：$x=a^2-b^2$，$y=2ab$。又 $f(z)=z^2$ 虽为一单位函数，但却非一一对应关系，因 $f(-1)=f(1)$。由易数的二重性关系(表 7-6)，吾人可由八卦的序列 $Z(a,\ b)$，求出对应的 $w(x,\ y)=z^2$，列如表 7-7：

根据表中的数据，八卦平方函数的转换关系 $W=Z^2$ 如图 7-15 所示。

表 7-6　周易复变函数的二重性特质

实虚数数单单位位与	Re= $\sqrt{1}=\pm 1$ $(\pm 1)^2=1$		Im= $\sqrt{-1}\pm i$ $(\pm i)^2=-1$	
	$+1$	-1	$+i$	$-i$
复数的共轭性	$z=a+bi$ $\bar{z}=a-bi$	$z=-a-bi$ $\bar{z}=-a+bi$	$z=-b+ai$ $\bar{z}=b+ai$	$z=b-ai$ $\bar{z}=-b-ai$
易数的二重性	$w=x+yi$ $\tilde{w}=y+xi$	$w=-x-yi$ $\tilde{w}=-y-xi$	$w=-y+xi$ $\tilde{w}=-x+yi$	$w=y-xi$ $\tilde{w}=x-yi$

表 7-7　易数的二重性系统

$z(a,b)$ $\tilde{z}(b,a)$	坤：(7, 0), (−7,0) 乾：(0, 7), (0,−7)	艮：(6,1,),(6−1),(−6,−1),(−6,−1) 兑：(1,6),(1−6),(−1,6),(−1,−6)	坎：(5,2),(5−2)(−5,2)(−5,−2) 离：(2,5)(2,−5),(−2,5),(−2,−5)	巽：(4,3)(4,−3)(−4,3),(−4,−3) 震：(3,4),(3,−4),(−3,4),(−3,−4)
$w(x,y)$ $\tilde{w}(y,x)$	(坤)²：(49,0),(49,0) (乾)²：(0,49),(0,49)	(艮)²：(35, 12),(35,−12),(35,−12),(35,12) (兑)²：(−35,12),(−35,−12),(−35,−12),(35,12)	(坎)²：(21, 20),(21,−20)(21,−20),(21,20) (离)²：(−21,−20),(−21,+20)(−21,−20),(−21,20)	(巽)²：(7,24),(7,−24)(7,−24),(7,24) (震)²：(−7,24),(−7,−24),(−7,−24),(−7,24)

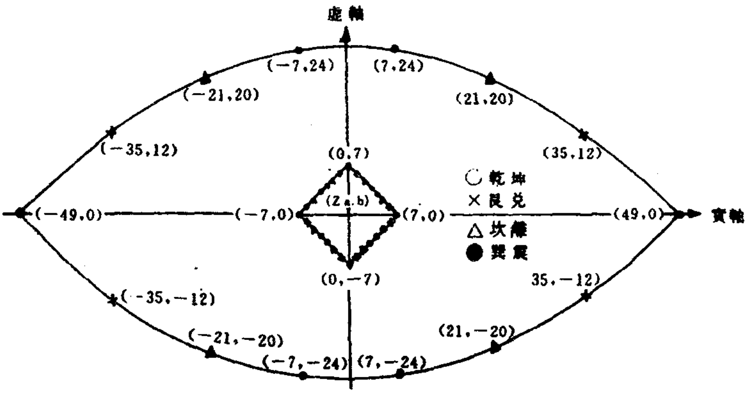


图 7-15　$W=Z^2$

(2)设 $Z=a+bi$ 位于复数面内，求解面中必有另一复数 $W=x+yi$，两者符合复变函数关系 $W^2=Z$(当然，$-W$ 自亦符合此转换关系)。

［解］　由题知$(x+yi)^2=a+bi$，亦即$(x^2-y^2)+(2xy)i=a+$

bi。吾人需求解 $x^2-y^2=a$ 和 $2xy=b$。吾人据此可建立关系式$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$。如此就可以得出 $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$，再由 $x^2-y^2=a$，即得解为 $x^2=(a+\sqrt{a^2+b^2})/2$，$y^2=(-a+\sqrt{a^2+b^2})/2$、故 $x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ 和 $y=\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$。

读者根据上解，即可代入八卦的序列 $Z(a,b)$，求出对应的函数关系式 $W^2=(x+yi)^2=Z$，并进而谱出 $W^2=Z$ 的转换图。

3. 八卦的代数多项式或函数

代数的基本定理必须建筑在复数域上，一个复变函数多项式可表为 $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$，式中系数 a_n 可为实数或复数，$a\neq0$，$n\geqslant1$，函数 $p(z)=0$ 至少含有一个实数或复数，$a_n\neq0$，$n\geq1$。函数 $P(z)=0$ 至少含有一个实数或复数根，最多可有 n 个根，如果 $P(z)=0$ 含有一个复数根 $z=a+bi$，则其共轭复数 $\bar{z}=a-bi$ 亦必为一根，又根据因式分解原理，如果 $P(Z)=0$ 含有 r_1，r_2，$\cdots r_n$ 为根时，则 $p(z)=(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)$。例如以易卦系统中的太极来说，它含有 4 个基数 1，-1，i 和 $-i$，则太极的代数多项式必为 $P(z)=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=(z^2-1)(z^2-i^2)=z^4-1$，而太极就有成为代数基本定理的基础范例。

关于代数多项式的理论及其根与系数间的关系，读者可参读专书，不在本文范围之内，作者现要建立的是八卦多项式的生成原则。易卦系统的衍生是准照多项式的顺序，多项式是以线性代数式 a_1z+a_0 开始，此即相当于太极生两仪，故两仪就是构成易数的两个基元，但易数必须由实、虚两部分才能构成一个完全的复数 $z=a+bi$，在易卦的衍生层次上，只有象中的少阳 $z=2+1i$ 和少阴 $z=1+2i$ 才是构成一切易卦的两个基本因子，作者将此

归纳为一定理曰焦氏易卦多项式定理："每一易卦都可展成为少阴 $z=1+2i$ 或少阳 $z=2+1i$ 的三次代数多项式 z^3+az^2+bz+c，式中系数 a，b，c 为实数"。

现以八卦中的震卦与六爻卦系中的鼎卦为例，证明上述定理。

[例 1]证明震卦 $3+4i$ 可表为少阳 $2+1i$ 的三次多项式。

解：令 $3+4i=(2+1i)^3+a(2+1i)^2+b(2+1i)+c$。展开上式：$3+4i=(3a+2b+c+2)+i(4a+b+11)$。对应系数得联立式：$3a+2b+c-1=0$ 与 $4a+b+7=0$。

解得 $a=-3+c/5$，$b=5-4c/5$。

故依 c 值而有许多不同解的组合。

当吾人选定最低的适宜值 $c=5$，和 $c=-5$ 时，则得出下两组解：

(1)$C=5$，$a=-2$，$b=1$。(2)$c=-5$，$a=-4$，$b=9$。故

(1)$3+4i=(2+1i)^3-2(2+1i)+(2+1i)+5$；

(2)$3+4i=(2+1i)3-4(2+1i)2+9(2+1i)-5$。

同样，亦可求解 $3+4i=(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+c$。

两组解可为(1)$c=1$，$a=-2$，$b=7$；(2)$c=-4$，$a=-3$，$b=9$

故(1) $3+4i=(1+2i)^3-2(1+2i)^2+7(1+2i)+1$；

(2) $3+4i=(1+2i)^3-3(1+2i)^2+9(1+2i)-4$。

[例 2] 证明六卦系中的鼎卦 $34+29i$ 可表为少阳$(2+1i)$的三次多项式。

解：令 $34+29i=(2+1i)^3+a(2+1i)^2+b(2+1i)+c$。

展开上式：

$$34+29=(3a+2b+c+2)+i(4a+b+11)。$$

对应系数得联立式 $3a+2b+c-32=0$ 与 $4a+b-18=0$。

故得出两组解为(1)$a=1$，$b=14$，$c=1$ 与(2)$a=-1$，$b=22$，$c=$

-9。

故(1) $34+29i=(2+i)^3+(2+i)^2+14(2+i)+1$；

(2) $34+29i=(2+i)^3-(2+i)^2+22(2+i)-9$。

同样，亦可求出 $34+29i=(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+c$.

4. 八卦的指数函数(Exponential Functions)

在代数学中，复函数是实函数的延伸，两者间的定义、性质与操作必须对应符合。例如根据级数式 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$，当将实数 x 延伸为虚数 yi 时，则得出定义 $e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\cdots$，将此式再行组合为 $e^y=(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots)+i(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\cdots)$，就知它和权函数(*Power Function*)$\cos y+i\sin y$ 完全相合，如此就建立了虚数指数的基本定义：$e^{iy}=\cos y+i\sin y$。再根据指数的性质，吾人就得出复数的指数函数定义谓：令 $z=x+iy$，则 $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$。当将复数 z 还原为实数 x 时，则 $y=0$，结果就是实数恒等式 $e^x=e^x$。

有关 e^z 的各种性质和运算，读者可参阅专书，作者现只指出 e^z 为一周期函数，其周期为 2π。

本文篇幅所限，不能对八卦的指数函数多作论述，下面仅只列出八卦指数函数的和(即积)方阵(表 7—8)，且采用了减缩的指数函数定义式：$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x(\text{cis}y)$(例如离卦的指数函数为：$e^{2+5i}=e^2[\cos(5)+i\sin(5)]=e^2\text{cis}5]$。

表 7-8 八卦指数函数的和(积)方阵

$$e^{z+w}=e^ze^w=e^{(x+iy)+(v+iu)}$$

$$=\{e^x(\cos+i\sin y)\}\{e^u(\cos v+i\sin v)\}$$

$$=e^{x+u}(\cos(y+v)+i\sin(y+v)\}$$

$$=e^{x+u}(\text{cis}(y+v)) \qquad (13)$$

	坤 ☷ (7,0)	艮 ☶ (6,1)	坎 ☵ (5,2)	巽 ☴ (4,3)	震 ☳ (3,4)	離 ☲ (2,5)	兑 ☱ (1,6)	乾 ☰ (0,7)
☷ 地(7,0)	$e^{14}(cis0)$	$e^{13}(cis1)$	$e^{12}(cis2)$	$e^{11}(cis3)$	$e^{10}(cis4)$	$e^{9}(cis5)$	$e^{8}(cis6)$	$e^{7}(cis7)$
☶ 山(6,1)	$e^{13}(cis1)$	$e^{12}(cis2)$	$e^{11}(cis3)$	$e^{10}(cis4)$	$e^{9}(cis5)$	$e^{8}(cis6)$	$e^{7}(cis7)$	$e^{6}(cis8)$
☵ 水(5,2)	$e^{12}(cis2)$	$e^{11}(cis3)$	$e^{10}(cis4)$	$e^{9}(cis5)$	$e^{8}(cis6)$	$e^{7}(cis7)$	$e^{6}(cis8)$	$e^{5}(cis9)$
☴ 風(4,3)	$e^{11}(cis3)$	$e^{10}(cis4)$	$e^{9}(cis5)$	$e^{8}(cis6)$	$e^{7}(cis7)$	$e^{6}(cis8)$	$e^{5}(cis9)$	$e^{4}(cis10)$
☳ 雷(3,4)	$e^{10}(cis4)$	$e^{9}(cis5)$	$e^{8}(cis6)$	$e^{7}(cis7)$	$e^{6}(cis8)$	$e^{5}(cis9)$	$e^{4}(cis10)$	$e^{3}(cis11)$
☲ 火(2,5)	$e^{9}(cis5)$	$e^{8}(cis6)$	$e^{7}(cis7)$	$e^{6}(cis8)$	$e^{5}(cis9)$	$e^{4}(cis10)$	$e^{3}(cis11)$	$e^{2}(cis12)$
☱ 澤(1,6)	$e^{8}(cis6)$	$e^{7}(cis7)$	$e^{6}(cis8)$	$e^{7}(cis7)$	$e^{4}(cis10)$	$e^{3}(cis11)$	$e^{2}(cis12)$	$e^{1}(cis13)$
☰ 天(0,7)	$e^{7}(cis7)$	$e^{6}(cis8)$	$e^{5}(cis9)$	$e^{4}(cis10)$	$e^{3}(cis11)$	$e^{2}(cis12)$	$e^{1}(cis13)$	$e^{0}(cis14)$

表 7-8　八卦指数函数的和(积)方阵

5. 八卦的三角函数(Trigonmetric Functions)

根据指数函数公式

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y \tag{14}$$

可以得出 $\sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \quad \cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ (15)

将上面实数三角函数延伸到复数三角函数,就得下面定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\text{和 }\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{16}$$

兹将复数三角函数的若干重要性质,列出如下:

(1)$\sin z$ 是一奇函数,因为 $\sin(-z)=-\sin z$;$\cos z$ 是一偶函数,因为 $\cos(-z)=\cos z$。

(2)当 $\sin z=0$,则 $e^{2iz}=1$,即 $2iz=2k\pi i$,故 $z=k\pi$。当 $\cos_z=0$,则 $e^{2iz}=-1$,即 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,式中 $k=\pm0,\pm1,\pm2,\cdots$

(3)根据 $\sin z$ 和 $\cos z$,可以得出$(a)\sin^2 z+\cos^2 z=1$;$(b)\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$,$z\neq k\pi$,$(c)\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$,$z\neq k\pi$;$(d)\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$,$z\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$;$(e)\csc z=\dfrac{1}{\sin z}$,$z\neq k\pi$。

(4)$\sin(z+w)=\sin z\cdot\cos w+\cos z\cdot\sin w$ 和 $\cos(z+w)=\cos z\cdot\cos w-\sin z\cdot\sin w$。

本文篇幅所限,不能对八卦的三角函数多加论述,下面示出计算正弦函数与余弦函数的两个例题,并将八卦的正弦与余弦之值列于表 7-9。

例题:计算 $\sin(1+i)$与 $\cos(2+3i)$。

解:$\sin(1+i)=\dfrac{1}{2i}\{e^{i(1+i)}-e^{-1(1+i)}\}=\dfrac{1}{2i}\{e^{-1+i}-e^{1-i}\}$

$=\dfrac{1}{2i}\{\dfrac{1}{e}(\cos(1)+i\sin(1))-e(\cos(-1)-i\sin(-1)\}$

表 7—9　八卦的正弦与余弦函数值

八卦 \ 正弦与余弦	$sin(x+iy)$	$cos(x+iy)$
坤(7+0i)	$sin(7)$	$cos(7)$
艮(6+1i)	$\frac{1}{2}sin(6)(e+e^{-1})+i\,\frac{1}{2}cos(6)(e-e^{-1})$	$\frac{1}{2}cos(6)(e^{-1}+e)+i\,\frac{1}{2}sin(6)(e^{-1}-e)$
坎(5+2i)	$\frac{1}{2}sin(5)(e^{2}+e^{-2})+i\,\frac{1}{2}cos(5)(e^{2}-e^{-2})$	$\frac{1}{2}cos(5)(e^{-2}+e^{2})+i\,\frac{1}{2}sin(5)(e^{-2}+e^{2})$
巽(4+3i)	$\frac{1}{2}sin(4)(e^{3}+e^{-3})+i\,\frac{1}{2}cos(4)(e^{3}-e^{-3})$	$\frac{1}{2}cos(4)(e^{-3}+e^{3})+i\,\frac{1}{2}sin(4)(e^{-3}+e^{3})$
震(3+4i)	$\frac{1}{2}sin(3)(e^{4}+e^{-4})+i\,\frac{1}{2}cos(3)(e^{4}-e^{-4})$	$\frac{1}{2}cos(3)(e^{-4}+e^{4})+i\,\frac{1}{2}sin(3)(e^{-4}+e^{4})$
离(2+5i)	$\frac{1}{2}sin(2)(e^{5}+e^{-5})+i\,\frac{1}{2}cos(2)(e^{5}-e^{-5})$	$\frac{1}{2}cos(2)(e^{-5}+e^{5})+i\,\frac{1}{2}sin(2)(e^{-5}+e^{5})$
兑(1+6i)	$\frac{1}{2}sin(1)(e^{6}+e^{-6})+i\,\frac{1}{2}cos(1)(e^{6}-e^{-6})$	$\frac{1}{2}cos(1)(e^{-6}+e^{6})+i\,\frac{1}{2}sin(1)(e^{-6}+e^{6})$
乾(0+7i)	$\frac{1}{2}(e^{7}-e^{-7})i$	$\frac{1}{2}(e^{7}+e^{-7})$

$$=\frac{1}{2}\sin(1)(e^{-1}+e)+i\ \frac{1}{2}\cos(1)(e-e^{-1})$$

$$\cos(2-3i)=\frac{1}{2}\{e^{i(2+3i)}+e^{-i(2+3i)}\}=\frac{1}{2}\{e^{-3+2i}+e^{3-2i}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{e^{-3}(\cos(2)+i\sin(2))+e^{3}(\cos(-2)+i\sin(-2))\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos(2)(e^{3}+e^{-3})+i\ \frac{1}{2}\sin(2)(e^{-3}-e^{3})。$$

6. 八卦的对数函数(Logarichmic Function)

在实数域内,对数函数与指数函数形成两个互为可逆的函数转变关系,当 $y=e^x$ 时,它的解就是 $\log y=x$。因为指数函数为一多值函数,且永不为零值,故对数函数亦必具有此二性质。当将此种函数关系延伸到复数域内,则在复数平面中,对于任一不为零值的 $z=x+iy$,亦必存在另一复数 $w=u+iv$,两者符合函数关系 $w=\log z$,其逆函数就是 $z=e^w$,吾人称 w 为 z 的对数。

根据极坐标式,$z=x+iy=|z|e^{i\theta}$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arg z$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$,采用对数时得:

$$e^{ln|z|+i\arg z}=e^{ln|z|}e^{i\arg z}=|z|e^{i\theta}=z \tag{17}$$

故只用 θ 之主值时,吾人定义 $w=ln|z|+i\arg z$,但 z 为周期函数:$\arg z=\theta+2n\pi$,故得复数的对数函数之定义如下:

如果 $w=\ln z$,则

$$w=\ln|z|+i(\arg z+2n\pi),(n=\text{整数}) \tag{18}$$

本文篇幅所限,不能对八卦的对数函数多加论述,但作者必须指出一点:在一般情况下,对数关系式 $\log(z_1\cdot z_2)=\log z_1+\log z_2$ 不能成立,现用下例题证明此点,并示出计算对数值的方法。

例题:计算 $z_1=i$, $z_2=-1+i$ 和 $z_3=-1-i$ 三者的对数值,并用此三对数值证明 $\log(z_1\cdot z_2)\neq\log z_1+\log z_2$。

解：$\log(i)=\log|i|+i\arg i=\log 1+i\,\dfrac{\pi}{2}=i\,\dfrac{\pi}{2}$

$$\log(-1+i)=\log|-1+i|+i\arg(-1+i)$$

$$=\log\sqrt{2}+i\,\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{2}\log 2+i\,\frac{3}{4}\pi$$

$$\log(-1-i)=\log|-1-i|+i\arg(-1-i)$$

$$=\log\sqrt{2}-i\,\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{2}\log 2-\frac{3}{4}\pi$$

但吾人可示出 $z_1\cdot z_2=i(-1+i)=-1-i$。

故可证明 $\log(z_1\cdot z_2)=\log(-1-i)=\dfrac{1}{2}\log 2-i\,\dfrac{3}{4}\pi\neq\log(i)+\log(-1+i)=i\,\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2+i\,\dfrac{3}{4}\pi=\log z_1+\log z_2$。

根据八卦体系的复数基本关系式（表 7-1），作者将八卦体系的对数值的计算列成表 7-10。

卦系	複數式 $z=x+yi$	絶對值 $\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	幅角 θ $\arg z$	對數函數式 $\ln z = \ln\lvert z\rvert + i(\arg z + 2n\pi)$	對數值
兩儀 陰--	$Re=\sqrt{1}=+1$	$\sqrt{1}$	0	$\ln\lvert 1\rvert + i(\arg 0 + 2\pi n)$	$2\pi n i$
	-1		π	$\ln\lvert 1\rvert + i(\arg\pi + 2\pi n)$	$(2n+1)\pi i$
兩儀 陽—	$Im=\sqrt{-1}=+i$	$\sqrt{1}$	$\pi/2$	$\ln\lvert 1\rvert + i(\arg\pi/2 + 2\pi n)$	$\pi i/2 + 2\pi n i$
	$-i$		$-\pi/2$	$\ln\lvert 1\rvert + i(\arg -\pi/2 + 2\pi n)$	$-\pi i/2 + 2\pi n i$
四象 太陰⚏	$3+0i$	3	0	$\ln\lvert 3\rvert + i(\arg 0 + 2\pi n)$	$\ln 3 + 2\pi n i$
四象 少陽⚎	$2+1i$	$\sqrt{5}$	$1.3\pi/9$	$\ln\lvert\sqrt{5}\rvert + i(\arg 1.3\pi/9 + 2\pi n)$	$\frac{1}{2}\ln 5 + 1.3\pi i/9 + 2\pi n i$
四象 少陰⚍	$1+2i$	$\sqrt{5}$	$3.2\pi/9$	$\ln\lvert\sqrt{5}\rvert + i(\arg 3.2\pi/9 + 2\pi n)$	$\frac{1}{2}\ln 5 + 3.2\pi i/9 + 2\pi n i$
四象 太陽⚌	$0+3i$		$\pi/2$	$\ln\lvert 3\rvert + i(\arg\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$	$\ln 3 + \frac{\pi}{2}i + 2\pi n i$
八卦 坤☷	$7+0i$	7	0	$\ln\lvert 7\rvert + i(\arg 0 + 2\pi n)$	$\ln 7 + 2\pi n i$
八卦 艮☶	$6+1i$	$\sqrt{37}$	$0.5\pi/9$	$\ln\lvert\sqrt{37}\rvert + i(\arg 0.5\pi/9 + 2\pi n)$	$\frac{1}{2}\ln 37 + 0.5\pi i/9 + 2\pi n i$
八卦 坎☵	$5+2i$	$\sqrt{29}$	$1.1\pi/9$	$\ln\lvert\sqrt{29}\rvert + i(\arg 1.1\pi/9 + 2\pi n)$	$\frac{1}{2}\ln 29 + 1.1\pi i/9 + 2\pi n i$
八卦 巽☴	$4+3i$	5	$1.9\pi/9$	$\ln\lvert 5\rvert + i(\arg 1.9\pi/9 + 2\pi n)$	$\ln 5 + 1.9\pi i/9 + 2\pi n i$
八卦 震☳	$3+4i$	5	$2.7\pi/9$	$\ln\lvert 5\rvert + i(\arg 2.7\pi/9 + 9\pi n)$	$\ln 5 + 2.7\pi i/9 + 2\pi n i$
八卦 離☲	$2+5i$	$\sqrt{29}$	$3.4\pi/9$	$\ln\lvert\sqrt{29}\rvert + i(\arg 3.4\pi/9 + 2\pi n)$	$\frac{1}{2}\ln 29 + 3.4\pi i/9 + 2\pi n i$
八卦 兌☱	$1+6i$	$\sqrt{37}$	$4\pi/9$	$\ln\lvert\sqrt{37}\rvert + i(\arg 4\pi/9 + 2\pi n)$	$\frac{1}{2}\ln 37 + 4\pi i/9 + 2\pi n i$
八卦 乾☰	$0+7i$	7	$\pi/2$	$\ln\lvert 7\rvert + i(\arg\pi/2 + 2\pi n)$	$\ln 7 + \pi/2 + 2\pi n i$

表 7-10 八卦体系的对数函数式

结　　语

作者基于下列三个目的：

（一）为对中国古代传统文化的继承、重整与发扬工作开路。

（二）为将东方古代哲学文明与西方现代科学文明的整合奠基。

（三）为促进中国文化成为21世纪的世界文化的主流尽力。

进行了建立《焦氏周易宇宙代数学》的研究工作，作出这篇开创性启蒙性的研究论文，敬请中国和世界上的专家学者指教与批评。

最后，作者愿以五言诗一首，结束本文。

要作智慧人，先识河洛易；
阴阳实虚变，生命展真谛。

参 考 文 献

[1]焦蔚芳：洛书的数学研究——焦氏“洛书矩阵”学说，《世界科学》，1987年第5期，第23～26页。

[2]焦蔚芳：洛书的数学研究之二——焦氏“洛书数字几何学”导论，《世界科学》，1991年第3期，第6～14页。

[3]焦蔚芳：洛书的数学研究之三——焦氏“河洛数论探源”，《世界科学》，1992年第8期，第3～8页第9期，第9～12页。

[4]Carl G. Jung，"Man And His Symbols"，Doubleday & Company，Garden City，New York，1964.

[5]Abraham Pais，"Bohr's Century，Neils Bohr's Times，In Physics，Philosophy And Polity"，Oxford University Press，1991.

[6]Kerson & Rosemry Huang，"I Ching"，Workman Publishing，New York，1987.

[7]王赣，牛力达，刘兆玖，《古易新编》(上)，黄河出版社，1988年。

[8]D. L. Livesey, Am. J. Phys. 30, 629(1962).

[9]Carl B. Boryer, "A History Of Mathemathics", 2nd Ed, John Wiley & Son Inc., New York, 1991.

[10] Colin A. Ronan & Joseph Needham," The Shorter Science & Civilisation In China: 1", Cambridge University Press, 1978.

[11]董光璧,《易图的数学结构》,上海人民出版社。

第 8 章　河图→洛书→易卦→太极图

——焦氏“河洛易数学体系”

作者根据现代数学中的代数学、几何学与数论的理论和方法，完成了对《河图》、《洛书》和《易卦》三大符号体系的初步数学研究，建立了对河图和洛书的数字解析、洛书矩阵学说、洛书数字几何学及周易宇宙代数学。根据这些初步研究成果，作者就可描绘出这三大古老符号体系的现代数学结构，示出三者间的演进机构和过程，建立三者所组成的具有连续性、自洽性与整体性的“河洛易数学体系”。

一、河图的数学结构与由河图到洛书

1. 河图的数学结构

河图代表中国古代人民由北京猿人到伏羲时代的数学思维的结晶模型，它是人类根据宇宙本身内在的自然数系界定出来的数学思维的基础符号体系。在人类文化史中，中国人首先制定并采用十进位数系，他们根据对人类双手十指的结构和宇宙间各种事物现象的长期体验，创造了用十进位数系来描绘事物间的数量关系；并在应用十进位数系的体验中，创造了《河图》，《洛书》和《易卦》三大数学思维符号体系。

用现代数论语言说，河图所用的数集可表为 $H=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，它的数学结构是由 5 个序偶$(x, y)$或$(a,$

b)按照泛函关系 $y=f(x)=x+5$ 组成，此即河图结构关系式：$R_h=\{(x, y); y=x+5, x, y\varepsilon H\}=\{(1, 6); (2, 7); (3, 8); (4, 9); (5, 10)\}$。

因为河图内的序偶都是二元数，根据矢量代数学的解析，我们亦可证明河图数字能够张成一个 2 维的矢量空间。

数学是数与形的结合，河图图形的排列亦必有其数学机理。河图的中心数字是 5，象征 5 为十进位数系中的枢纽数(*pivot number*)，中数(*mean value*)或模数(*module*)。环绕核心 5 及其四周的 5 个序偶就是河图的元始定义谓："一与六共宗，二与七为朋，三与八成友，四与九同道，五与五相守"。这个原始定义的数学意义就是河图图形排列的机理，亦就是以模数为 5 的同余算术及其所生出的 5 个等价组如下：

$0\equiv0(\mathrm{mod}5)$　$5\equiv0(\mathrm{mod}5)$　$10\equiv0(\mathrm{mod}5)$(河图核心)

$1\equiv1(\mathrm{mod}5)$　$6\equiv1(\mathrm{mod}5)$　(河图下方)

$2\equiv2(\mathrm{mod}5)$　$7\equiv2(\mathrm{mod}5)$　(河图右方)

$3\equiv3(\mathrm{mod}5)$　$8\equiv3(\mathrm{mod}5)$　(河图左方)

$4\equiv4(\mathrm{mod}5)$　$9\equiv4(\mathrm{mod}5)$　(河图上方)

这即表示出在整数系中每个整数可分别相当于 0，1，2，3，或 4。

这 5 个等价组的加法符合 $a(\mathrm{mod}5)+b(\mathrm{mod}5)=(a+b)(\mathrm{mod}5)$，乘法符合 $a(\mathrm{mod}5)\cdot b(\mathrm{mod}5)=a\cdot b(\mathrm{mod}5)$，其加法表与乘法表分别示出两法所生逆数如下：

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

根据上面的数论解析，我们可以得出一个推论：河图的数学结构显示出十进位数系的操作二重性特质，它既可按照线性关

系，由核心扩张为连续性与无限性的宇宙二维空间，亦可按照同余关系聚集为间隔性的等价组合和有限(有定)性的二维空间，这就是宇宙空间的二重性特质。

2. 由河图到洛书

宇宙空间形成的过程是由一维的直线系统扩张成为二维平面系统，再进而成三维空间系统，再进而成四维时空系统。每一系统的构成必有它的数域基础，每两个系统间的转变必遵循一定的转变函数关系，整个宇宙空间就构成一个相关的、自洽的和整体性的数学体系。河图代表二维平面体系，构成河图序偶(x,y)或(a,b)的泛涵关系为 $y=x+5$，如果吾人已知洛书代表三维空间体系，它的三元数序为(x,y,z)或(a,b,c)，三元数的泛涵关系为 $x+y+z=15$，则由河图到洛书的转换有如表 8—1 所示。

表 8—1　由河图到洛书

数　　系	泛涵关系	由河图到洛书的对应关系
河图序偶(x,y)	$y=x+5$	(1，6)；(2，7)；(3，8)；(4，9)
洛书三元数(x,y,z)	$x+y+z=15$	(1，6，8)；(2，7，6)；(3，8，4)；(4，9，2)

表 8—1 示出由河图中的 4 个序偶所生出的 4 个对应洛书三元数，但当吾人仍采用枢纽数 5 为洛书的中心时，则合乎 $x+y+z=15$ 泛函关系者尚有三元数(1，5，9)；(2，5，8)；(3,5,7)，(4，5，6)。吾人将此二组三元数结合成为一个体系，就是洛书。

二、洛书的数学结构与由洛书到易数

1. 洛书的数学结构

洛书代表中国古代人民由伏羲到夏禹时代的数学思维的结晶

模型，在这约千年的历史过程中，中国人民将代表二维平面空间数系的河图演进并升华为代表三维立体空间的洛书三元数系。洛书九数的元始定义就是“二九四、七五三、六一八”。按照洛书九数龟形排列的形状，又定义洛书为“九宫”曰：“九宫者，即二四为肩，六八为足，左三右七，载九履一，五居中央”。又因洛书中每行、每列及两对角线所成三元数字的和均为 15，中国及世界上的数学家们就称洛书为“幻方”，并建立和发展出“幻方数学”，直到今日。笔者为了将“洛书幻方”与现代数学挂钩，就根据现代数论、代数学及几何学对洛书的数学结构进行研究，现将主要结论概述如下：

根据现代数论，洛书所用的数集可表为 $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，它的数学结构是由 3 个三元数 (x,y,z) 或 (a,b,c) 按照泛涵关系 $x+y+z=15$ 组成，此即洛书结构关系式：$R_l=\{(x, y, z): x+y+z=15, x,y,z\epsilon L\}=\{(4, 9, 2);(3, 5, 7);(8, 1, 6)\}=\{(4, 3, 8);(9, 5, 1);(2, 7, 6)\}$。根据洛书数的集运算，吾人可以建立多种的数学系统与结构。

根据矩阵代数学，作者就将“洛书幻方”直接等同为“洛书矩阵”，建立了焦氏“洛书矩阵”学说，奠定了洛书矩阵的数学定义、分类、形成、目的和转变 5 项研究成果。洛书矩阵学说的中心意义是：三维向量空间由 0 到 360 度的几何结构变化，就是洛书矩阵由自然洛书到洛书本体的组合结构变化。洛书矩阵学说的建立，使《洛书》成为自然界中线性系统的建立基础，发挥出联系原因与结果、作用与反应、输入与输出的基本功能。

根据解析几何学，作者应用洛书矩阵中三行或三列三元数系作为三维坐标系统中的 3 个基矢，以代替解析几何中所用的卡氏(Cartesion)单元基矢，就可建立一个新的解析几何系统，作者称它为“洛书数字几何学”，由洛书坐标系统所建立的空间，作者称它为“洛书空间”。洛书空间具备一些特有性质，可以描绘自然界

中的客观现象及显示物理世界的映象，这些特质中最主要的是：(1)洛书空间是一个线性系统，它的数学操作是加与乘；(2)洛书空间是无限的，但是通过数学操作亦可变成有限的；(3)洛书空间为连续的，但亦可被数学运算划分成互相隔离的组合；(4)洛书空间可由实数和虚数、有理和无理数组成；(5)洛书空间并非一成不变，而是可以重复地膨胀与收缩；(6)洛书空间具有均质、对称和平衡性；(7)洛书空间能作周期性地运动或永不休止地变化；(8)洛书空间具有量子化的特质。这些特质均非由单元基矢构成的空间所能显示。

2. 由洛书到易数

由洛书三元数系(a,b,c)到易数$z=x+yi$的建立，绝不是简单直接的由算术的加、减、乘、除操作所产生，而是长期人类数学思维的成果结晶，具体地历史证明就是由夏禹王时代的洛书符号体系发展为周文王时代的易卦阴阳符号体系。作者根据现代数学理论，说明由洛书到易数的数学转变过程如下：

(1)洛书三元数系与一元二次多项式的建立

在实数域内，应用洛数三元数(a,b,c)就可建立一元二次多项式$ax^2+bx+c=0$及其两个解答x_1与x_2的值有如下两式：

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(2)崭新的“虚数单位”概念的建立

上述两根x_1与x_2的性质即依式中$\sqrt{b^2-4ac}$平方根的性质而分3种情况：(i)如果$b^2-4ac>0$，则两根为互不相等的两个实数；(ii)如果$b^2-4ac=0$，则两根互为相等的实数；(iii)如果$b^2-4ac<0$，则两根就非实数域所能解答，而必须引入一个崭新的数的概念，亦即建立“虚数单位”，表作$i=\sqrt{-1}$，它的数学意义就

是 $i^2=-1$。如此一来，吾人就称 $\sqrt{1}$ 为实数单位，并建立了复数域 $Z=x+yi$ 或 $c=a+bi$，而易数就是复数。当一元二次多项式 $ax^2+bx+c=0$ 中的 $b^2-4ac<0$ 时，它的两个复数根分别为 $x_1=\frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$；$x_2=\frac{-b}{2a}-i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$。

(3)由洛书到易数

根据上述由实数产生虚数的机理，吾人可用到洛书三元数序 (a,b,c)，求出它的判别式 $\sqrt{b^2-4ac}$ 所生的实数序列和虚数序列如表 8-2。

表 8-2　洛书三元数序所生实数序列与虚数序列

洛书数序 (a,b,c)	一元二次多项式 $ax^2+bx+c=0$	$b^2-4ac>0$，$\sqrt{b^2-4ac}$	$b^2-4ac<0$，$\sqrt{4ac-b^2}$	实数序列	虚数序列
(2, 7, 6)	$2x^2+7x+6=0$	$\sqrt{49-48}=\sqrt{1}=\pm1$	$\sqrt{48-49}=\sqrt{-1}=\pm i$	1	$1i$
(1, 6, 8)	$x^2+6x+8=0$	$\sqrt{36-32}=\sqrt{4}=\pm2$	$\sqrt{32-36}=\sqrt{-4}=\pm2i$	2	$2i$
(3, 8, 4)	$3x^2+8x+4=0$	$\sqrt{64-48}=\sqrt{16}=\pm4$	$\sqrt{48-64}=\sqrt{-16}=\pm4i$	4	$4i$
(4, 9, 2)	$4x^2+9x+2=0$	$\sqrt{81-32}=\sqrt{49}=\pm7$	$\sqrt{32-81}=\sqrt{-49}=\pm7i$	7	$7i$

如果吾人引用伏羲的阴爻(— —)与阳爻(—)符号体系，令阴爻表实数单位 $\sqrt{1}=\pm1$，令阳爻表虚数单位 $i=\sqrt{-1}=\pm i$；并再引用二进位数系 $2^0=1$，$2^1=2$，$2^2=4$，以及关系式 $1+2+4=7=2^3-1$，则表 8-2 所示结果，就是由洛书转变为易数的数学机理，并可建立伏羲的阴阳八卦符号体系及其对应的复数关系如下：

☷	☶	☵	☴	☳	☲	☱	☰
$7+0i$	$6+1i$	$5+2i$	$4+3i$	$3+4i$	$2+5i$	$1+6i$	$0+7i$

三、易卦与太极图的数学结构以及由易卦到太极图

1. 易卦的数学结构

作者根据易卦阴阳符号体系和复数域的相互对应关系，奠定了易卦即易数，易数即复数；并建立了焦氏“周易宇宙代数学”。易卦(数)体系的主要特质之一是其阴(实)阳(虚)二重性，亦即易数(Zn)体系是一个实数(X_{re})和虚数(Y_{im})的二重性集合，表作为：

$$Z_n=\left\{\sum_{k=1}^{2^n}(X_{re}+Y_{im})_k:|X|+|Y|=2^n-1\right\}$$

式中 $n=0$，1，2…表卦系之爻数(易数之维数)，$k=1$，2，3，…2^n 表卦序中的卦序(易数集的数序)，X 与 Y 均为实数，re 表实数单位 $\sqrt{1}=\pm1$，im 表虚数单位 $\sqrt{-1}=\pm i$，X 与 Y 必须满足实虚二重性关系 $|X|+|Y|=2^n-1$。吾人名 Z_n 曰易数集。例如三爻卦系所生八卦及其对应易数为：

$$Z_3=\begin{Bmatrix}(\text{坤})_{k=1},(\text{艮})_{k=2},(\text{坎})_{k=3},(\text{巽})_{k=4}\\(\text{乾})_{k=8},(\text{兑})_{k=7},(\text{离})_{k=6},(\text{震})_{k=5}\end{Bmatrix}$$

$$\equiv\begin{Bmatrix}(7+0i)_{k=1},(6+1i)_{k=2},(5+2i)_{k=3},(4+3i)_{k=4}\\(0+7i)_{k=8},(1+6i)_{k=7},(2+5i)_{k=6},(3+4i)_{k=5}\end{Bmatrix}$$

在 Z_3 中 $n=3$，共含 $2^3=8$ 卦，卦序由坤为第一卦到乾为第八卦，其中坤与乾，艮与兑，坎与离，巽与震互为二重性，符合 $X+Y=2^3-1=7$ 之关系。

作者根据对六爻易卦(数)矩阵的数学解析，可归纳出周易复数空间的两大构成原理如下：

(1)易卦(数)阴(实)阳(虚)二重性的整体性原理

六爻卦系复数矩阵$[Z_{kj}]_{8\times8}$是由其实数矩阵$[X_{kj}]_{8\times8}$和虚数矩阵 $i[Y_{kj}]_{8\times8}$相加而成。实虚两部的组成元素是由相同的自然数集按照相反的升降序列组成，所以易数集构成一个有序的，可数的

无穷复数系统，作者称易数构成关系式($|X|+|Y|_n=Z^n-1$ 曰“易数实虚二重性整体”原理。如此，吾人可推导出易数集与实数集的相互对应关系有：(i)自然数集是构成实数域的基础子集，易数集是构成复数域的基础子集；(ii)自然数集的算术运算衍生出实数体系，易数集的算术运算衍生出复数体系；(iii)实数只能位于实数线上，点与数可互为置换；易数只能位于乾坤线上，点与数可互为置换。

(2)<u>周易复数空间的线性结构原理</u>

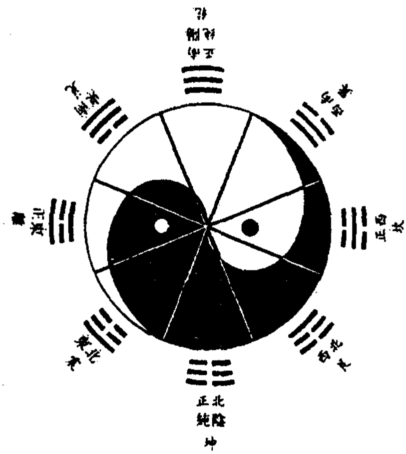
易数之值是按照二进制爻位系数规则而定，在易卦爻序中，第 n 位爻符之系数值等于其余所有各位爻符之系数值之和加 1，即 $2^n=\sum_{k=0}^{n-1}2^k+1(n=0,1,2,\cdots)$ 作者称此式曰“易数线性结构”原理。同样，易卦矩阵$[C]$并非下卦矩阵$[A]$与上卦矩阵$[B]$的乘积，而是$[A]$与$[B]$的线性组合，符合线性方程式$[C]=m[A]+[B]$，m 之值即由二进制爻位系数定则决定。在三爻八卦体系中，下卦 A 为两仪，上卦 B 为四象，其线性组合式为 $C=2(A)+(B)$，例如坤卦为$(7,0)=2(3,0)+(1,0)$；坎卦为$(5,2)=2(2,1)+(1,0)$。六爻卦系为八卦相互组合而成，按照易数空间的线性结构原理，可定出其线性公式为 $C=8(A)+(B)$，例如恒卦$(35+28i)$的下卦为巽$(4+3i)$，上卦为震$(3+4i)$，符合线性关系：$(35+28i)=8(4+3i)+(3+4i)$。读者可求出 64 卦中，每卦均符合此关系式。总之，任一易数均符合一般线性组合公式 $C=mA+nB$，再用对应系数法定出 m 与 n 之值，完全符合易数空间线性结构原理。

2. 太极图的数学结构分析

《周易》中只有“太极”一词，并无太极图象。“易”以太极为中心，为建元，其主旨是“乾坤一太极”。太极是道、是本体。易文曰：

“一阴一阳之谓道”。但太极如何生出“太极图”？及太极图形如何？因史无文献可稽，难作论断。太极图形最先出现于东汉魏伯阳所著《周易参同契》中，流传民间，俗称“阴阳鱼”(图 8-1)。宋朝朱熹将此图载入《周易本义》，遂为学者沿用至今，作者现以参同契太极图形为准，分析其数学结构如下：

参同契太极图实际上由下列几条曲线构成(图 8-2)：



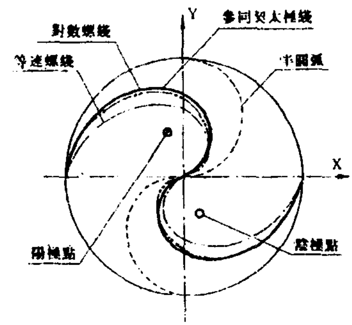


图 8-1 参同契太极图　　　　图 8-2 太极线

(1)圆周。其度量单位为 360 度(2π 弧度)。圆的单位半径为 r(单位圆)，r 可任意放大或收缩(例如 $r=1$，10，100…)。

(2)将圆划分为黑白两部分的两条曲线——此处称它为“太极线”(一般作者称它为“S 曲线”)。

在有些著作中，曾将该两条曲线当作两个半圆来处理，但由图中可以看出，半圆曲线与太极曲线的误差甚大，而且半圆曲线也缺少太极的“无穷演化”的特质。为此，作者建议用等速螺线来比拟太极曲线。等速螺线的定义为：一质点以等速离开 O 点又以

等角速度绕 O 点旋转，该质点所描绘的轨迹为一等速螺线。由此得两条等速螺线的数学方程(极坐标)为：

阳线：$r=a\theta \qquad (\theta=0\sim\pi)$

阴线：$r'=a(\theta'-\pi) \qquad (\theta'=\pi\sim2\pi)$

$$当\ \theta=\pi \qquad r=10, \qquad 得 \quad a=\frac{10}{\pi}。$$

将等速螺线绘在太极图上(图 8—2)，可见它比半圆曲线要接近于太极线得多，但仍有一些误差。更近似的方法是用对数螺线来比拟，对数螺线的极坐标方程为：

$$r=b\theta^{d}$$

式中：b 与 d 为待定系数。

采用最小二乘法可得到 $b\approx4.5$，$d\approx0.7$。由此得 $r=4.5\theta^{0.7}$ 曲线，绘在太极图内(图 8-2)，基本上与太极线一致。

总之，用阴阳 2 根螺线来代表太极线，既表征了太极的“阴阳参合”，也含有旋转与无限伸张或收缩的特质。

(3)极点。太极图中黑白两部分中各有一“眼”。亦即数学上的极点。其意义相当于球体的南北极，或是流场中的“源”与“汇”。如将太极图当作极坐标内的平面图形，则可得到两极点的坐标约为：

阳极点：$r_1=4, \qquad \theta_1=\frac{5}{8}\pi$

阴极点：$r_2=4, \qquad \theta_2=1\frac{5}{8}\pi$

3. 从河洛数集到太极图

由前文中我们已知，河图数集 $H=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，洛书数集 $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。根据数学中的坐标转换原理，我们可找到该两数集与太极图之间的关系。

我们可以设想河洛数集为直角坐标中实轴 X 上的各点：

$X=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$；$X'=[-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10]$

将各点依此旋转 $\Delta\theta$ 角，并转换到极坐标上，即得以等速螺线为代表的太极曲线，如图 8-3 所示。各点的坐标为：

$$\begin{cases} r=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] \\ \theta=\left[\dfrac{\pi}{10},\dfrac{\pi}{5},\dfrac{3\pi}{10},\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{5},\dfrac{7\pi}{10},\dfrac{4\pi}{5},\dfrac{9\pi}{10},\pi\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r'=[-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10] \\ \theta'=\left[1\dfrac{\pi}{10},1\dfrac{\pi}{5},1\dfrac{3\pi}{10},1\dfrac{2\pi}{5},1\dfrac{\pi}{2},1\dfrac{3\pi}{5},1\dfrac{7\pi}{10},1\dfrac{4}{5}\pi,1\dfrac{9\pi}{10},\right] \end{cases}$$

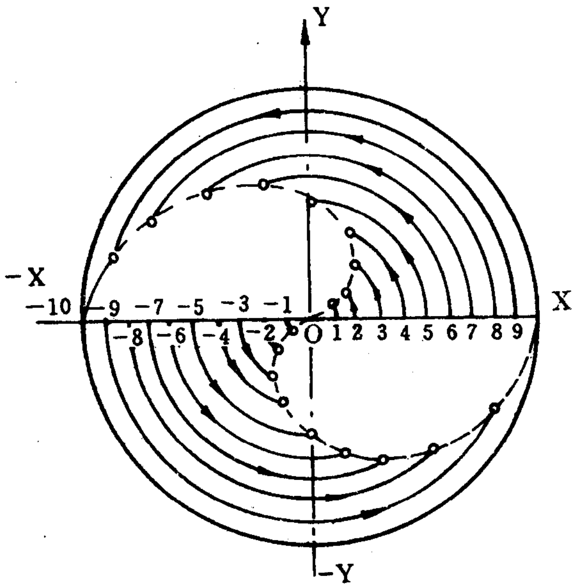


图 8-3 由河洛数集到太极曲线

如果进一步再从极坐标转换到球面坐标，即用 θ 代表球面的"径度"，另外再用球面上的"纬度" φ 代替 r；我们可以得到球面上的等速螺线：

阴线：$\varphi=\dfrac{\pi-\theta}{2}$ $\qquad(\theta=0\sim\pi,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}\to 0)$

阳线：$\varphi'=\dfrac{2\pi-\theta'}{2}$ $\qquad(\theta'=\pi\to 2\pi,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}\to 0)$

上述的角度 φ 相当于北半球的纬度，如将曲线延伸到南半球可得：

阴线：$\varphi=\dfrac{\theta-\pi}{2}$ $\qquad(\theta=\pi\to 2\pi,\ \varphi=0\to\dfrac{\pi}{2})$

阳线：$\varphi'=\dfrac{\theta'}{2}$ $\qquad(\theta'=0\to\pi,\ \varphi=0\to\dfrac{\pi}{2})$

如此则形成一"太极球面图"，如图 8-4 所示。该球面图暗合于地球阴阳面的变化。如 θ 角不变，则曲线成为半圆弧形的子午线。

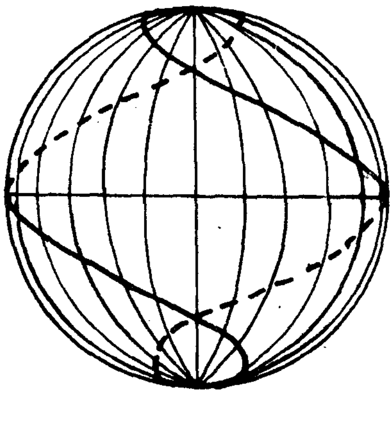


图 8-4　太极球面

上式分母中的系数 2 可用 $n=\{2,4,6,8\cdots\}$ 来代替，亦即代

表着螺线从北极到南极需环绕径度1圈(2π 弧度，360°)，2圈、3圈……，而构成的图形亦更为复杂。

4. 由易卦到太极图

根据复数代数学可阐明八卦转换成太极图之机理。

(1)复变函数原理

复数集(C)是由实数集(R)的扩展生成，而复数面(Z)亦就是实数面(R^2)的延伸，故实函数的形成与转换亦可延伸用于复函数。同理，易卦既是复数，则复变函数的转换机理则自可应用于易数。

在复数面中，每一复数 $C=a+bi$ 就是域内的一个点或矢量，当 C 作为变数时，其复函数式为 $Z=x+iy$，它的两个构成基底为实数 X 和 Y，与一复数域 Z 按照函数关系 F 转变(或映射)成为另一复数域 W，它的实部为 u，虚部为 v，这个转换关系式表作 $F: Z\rightarrow W$，它的复数函数式为：

$$W=u+iv=f(Z)=f(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y)$$

式中，函数 $f_1(x,y)$ 为复变函数 $f(Z)$ 的实数部分，$f_2(x,y)$ 为其虚数部分。

(2)由八卦到太极图的复变函数转换

今考察一复数域 Z，该域中包含($0+7i$,$1+6i$，$2+5i$，…,$7+0i$)各点，上述各点均在“乾坤”线上(图 8-5)，乾坤线的代数方程为：$x+y=7$。

在 Z 域中的复数 $Z=x+iy$，亦可以极坐标来表示，即：

$$Z=\tau(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

式中：$x=\tau\cos\alpha$　　$y=\tau\sin\alpha$

τ 为矢径，α 为辐角。

代入得：$\tau^2=x^2+y^2$　$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$

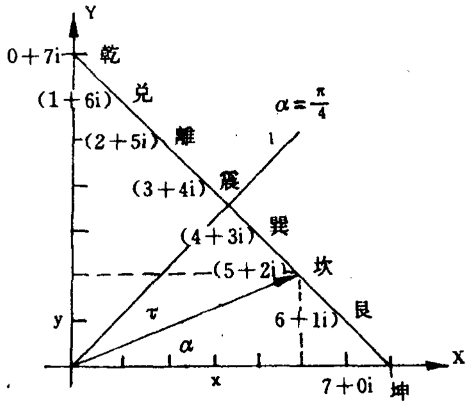


图 8-5 八卦的线性排列(乾坤线)

以 $x+y=7$ 代入得：

$$\tau=\sqrt{2x^2-14x+49};\quad \tau=\mathrm{tg}^{-1}\frac{7-x}{x}$$

$(x=0,1,2,\cdots 7)$

$$\therefore\quad Z=\sqrt{2x^2-14x+49}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2x^2-14x+49}}+i\frac{7-x}{\sqrt{2x^2-14x+49}}\right)\qquad \text{图 8—6}$$

$$=x+i(7-x)$$

根据上述的复变函数转换原理，可将 Z 域中的乾坤线转换为 W 域中太极图中的太极线(螺线)。其转换过程如下：

W 域中的复数：

$$W=u+iv=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

W 域中的复函数——太极线(用速度螺线代表)：

$$r=\frac{10}{\pi}\theta$$

$$\therefore \quad W=\frac{10}{\pi}\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$$

在 Z 域中以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 为对称线将乾坤线分为两段，然后将坤、艮、坎、巽各卦转换到 W 域太极图中的太极阴线，将乾、兑、离、震各卦转换到 W 域太极图中的太极阳线上。

由此得：

太极阴线：$\theta=4\alpha=4\mathrm{tg}^{-1}\frac{7-x}{x} \quad (x=\{7,6,5,4\})$

$$r=\frac{10}{\pi}\cdot 4\mathrm{tg}^{-1}\frac{7-x}{x}=\frac{40}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{7-x}{x}$$

太极阳线：$\theta'=4(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\pi=3\pi-4\mathrm{tg}^{-1}\frac{7-x}{x} \quad (x=\{0,1,2,3\})$

$$r'=\frac{10}{\pi}4(\frac{\pi}{2}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{7-x}{x})=20(1-\frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{7-x}{x})$$

		坤	艮	坎	巽
Z 域	x	7	6	5	4
	y	0	1	2	3
	τ	7	$\sqrt{37}$	$\sqrt{29}$	5
	α Rad	0	0.165	0.38	0.644
	α Deg	0°	9.5°	21.8°	36.9°
W 域	θ Rad	0	0.66	1.52	2.58
	θ Deg	0°	37.8°	87.1°	147.6°
	r	0	2.10	4.84	8.19

		乾	兑	離	震
Z 域	x	0	1	2	3
	y	7	6	5	4
	τ	7	$\sqrt{37}$	$\sqrt{29}$	5
	α Rad	$\pi/2$ =1.57	1.405	1.19	0.927
	α Deg	90°	80.5	68.2	53.1
W 域	θ' Rad	π=3.14	3.80	4.66	5.72
	θ' Deg	180°	217.8°	267.1°	327.6°
	r'	0	2.10	4.84	8.19

表 8-3　从易卦到太极图的数据

由以上可知：在 Z 域中，$Z=f(\tau,\ \alpha)=f(x)$；在 W 域中，$W=f(r,\ \theta)=f(x)$。故而如以 x 为参变量即可以得出 $W=F(Z)$，F 即为复变函数，如前所述 F：$Z\to W$ 即完成由八卦至太极图的转换。当 $x=0$，1，2，3…7 时，各参量的实际数据有如表 8-3 所示。

将八卦各点转换到太极图上，如图 8-6 所示。图中八卦的相对位置正好与参同契太极图上的一致。只需将图按顺时针方向转动 90°，即与“参同契”(图 8-1)的“天南地北”完全一致。

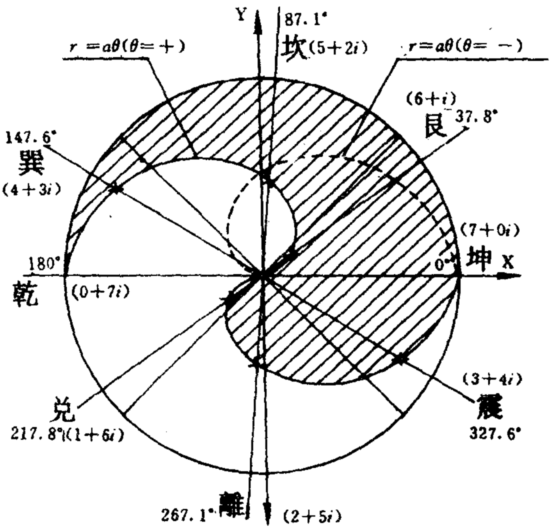


图 8-6　由易卦到太极图

四、河洛易数学体系

河洛易数学体系是以《河图》、《洛书》和《易卦》三大符号体系为构成元所建立的数学体系，它是中国古代人民由北京猿人到孔

子数十万年间数学思维结晶而成的符号体系，吾人可称它为“中国原始思维数学符号体系”。它是中国原始传统文化建立和成长的数学基础。作者根据对这三大符号体系的数学内涵之研究，以及对三者间数学转换的解析，归纳出河洛易数学体系的主要结构和特质如下：

1. 它是根据人类双手十指的数学模式而建立的。

2. 它是根据宇宙本体所具有的自然数集 $N=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 及其算术操作(加、减、乘、除)而建立的十进制数学系统。

3. 它是以天、地、人三才的有机结合产生出三者所含象、数、理的互释，再进而衍生出人类文化中的各种信息与系统的数学体系。

4. 由伏羲时代的河图符号体系到周文王时代的易卦阴阳符号体系的发展，就是人类将数系由自然数集衍生为复数集的数学思维的发展。

5. 河图符号体系代表宇宙中二维矢量空间的形成，它是遵照线性函数 $f(n)=a+nd$ 所张成的连续性无限空间；换句话说，河图数集就是算术级数的集合，函数式中的 $d=5$ 为公差，其中 a 为级数的首项，可分别为自然数集的形成基数 0，1，2，3 和 4。

6. 河图的结构是由核心及其四周的 5 个序偶组成，它的数学意义就是整数集可按照模数为 5 的同余数区分成 5 个等价组合，示出整数集中每个整数可分别相当于 0，1，2，3 或 4。

7. 洛书数集是数系中的基础，可用它建立多种的数学系统与结构。

8. 洛书幻方的结构可直接等同于洛书矩阵，张成为三维矢量空间，洛书矩阵就是自然界中线性系统的建立基础。

9. 洛书空间具有一些特质，可以描绘自然界中的客观现象及显示物理世界量子化的映象。这些特质都非一般几何空间所能

显示。

10. 易卦阴阳符号体系的建立标志着人类数学思维的一大跃进，就是将实数域中的十进位数系精简为阴阳两爻的二进位数系。

11. 易卦阴阳符号体系和现代数学中的复数系统互有一一对应关系，这就奠定了“易卦就是易数，易数就是复数”。

12. 易卦复数空间具有两大数学特质：一为易卦(数)阴(实)阳(虚)二重性的整体性原理；一为易数空间符合线性结构原理。

13. 河图、洛书、易卦三大符号体系可以通过数学操作与太极图的图象之间实行相互转换。这一过程也体现了现代科学中的“模”(*Module*)、“数”(*Number*)与“象”(*Phenomena*)之间的相互转换。

14. 河图、洛书和易卦三大符号体系(以及太极图)的数学、科学与哲学内涵就是人类文化构成的主要思维内涵。

最后，以简语四句作为本章的结语：

五序纵横显河图
三维矩阵谱洛书
两仪阴阳启易卦
太极万象化时空

附录1　焦蔚芳博士传略

（据英国剑桥1980年国际名人传简译及补充）

焦蔚芳博士生于1918年9月26日，原籍中国河南省汲县（现名卫辉市），父名焦梦龄，母名李清莲。他于1943年与陈希儒结婚，不幸因战争失散而断音讯，乃于1952年在台湾与徐秀菱结婚，共有子女三人：长女焦振莊，次女焦振英，三男焦振汉。

他是一位科学家、工程师及教育工作者，1941年毕业于中国国立西北工学院冶金工程系，1958年获美国芝加哥伊利诺理工学院材料科学与工程硕士，1963年获耶鲁大学应用物理与工程博士。他为了研究《易经》的科学内涵，乃于1978年获英国Sussex理工大学生物化学博士。

他大学毕业后工作于重庆大渡口钢铁厂（1941～1943），西北工学院冶金系讲师（1943～1945），台湾兵工研究所研究员（1945～1947），台北工业专科学校冶金系教授（1947～1956）。在美国曾任伊利诺理工学院研究助理（1956～1958），LaSalle钢厂研究工程师（1958～1959），耶鲁大学副研究员（1959～1963），Climax钼业公司高级研究员（1963～1966），M&R高温金属公司研究部主任（1966～1968），美国陆军部材料与力学研究中心高级研究员（1968～1983）。他于1983年9月申请由陆军部退休，专心致力筹建河洛易理念书院，从事对《河图》、《洛书》和《易卦》的数学研究，建立了"河洛易数学体系"和《周易宇宙代数学》。

焦博士举家于1968年秋定居在美国麻省波士顿郊区。他和当地华裔学人筹建成立大波士顿郊区华人圣经教会，中华文化协会及全美华人协会。

他根据对河图、洛书和易卦的研究理念，建立了人类生命过

程的双重性理论：一为生命的生长过程，亦即由生到死的过程；一为生命的遗传过程，亦即两性生殖过程。他提出了人体生殖生理的分子学说，并创造了 DNA 分子在男性体内的双重循环途径，对人类的优生演化和人口控制可有极大助益。

他在"河洛易数学体系"的研究工作中，建立了：(一)焦氏"洛书矩阵"学说；(二)焦氏"洛书数字几何学"导论；(三)焦氏"河洛数论"探源；(四)焦氏"周易宇宙代数学"原理；以及(五)焦氏"周易宇宙代数学"建元。他的上述 5 篇论文均发表在上海社会科学院哲学研究所主编的《世界科学》月刊(由 1987 年到 1993 年)上。

焦博士曾为中国矿冶工程学会会员，美国矿冶工程学会会员，美国科学促进会会员，国际金属学会会员，国际领导人协会会员。他曾被选入美国名人录(1977 年)，杰出美国人名录(1978)，英国剑桥世界名人录(1979 年)，美国科技名人录(1981 年)，美国陆军部优秀服务人名录(1983 年)。

他的业余爱好有太极拳、跑步、旅游、读书以及研究河图、洛书和易卦。他的生命目标就是：希望在有生之年，根据《周易·大衍》学说，建立"太极大衍"学说，作为阐释宇宙万有的终极理论。

附录2　焦蔚芳博士和他的“河洛易数学体系”

——焦蔚芳博士越洋通讯采访录

《世界科学》1993年第5、11、12期刊出的《周易代数学》一文是焦蔚芳先生多年研究的心得，也是他对“河洛数学”研究的新层次。《世界科学》近年来已先后刊出焦先生的五篇大作(《洛书的数学研究——焦氏“洛书矩阵”学说》(1987年第5期)；《洛书的数学研究之二——焦氏“洛书数字几何学”导论》(1991年第3期)；《洛书的数学研究之三——焦氏“河洛数论”探源(上)(下)》(1992年第8、9期)；《易卦》的数学研究之一——焦氏“周易宇宙代数学”原理》(1993年第5期)；《焦氏“周易代数学”》(1993年第11、12期)。文章刊出后，该编辑部收到一些读者来信，希望能介绍一下焦先生个人的一些简历、他的学术思想及成果。为此我们以通讯方式与远在大洋彼岸的焦先生作了笔谈式的采访，以下是通讯采访记录。

○焦先生，请介绍一下您的简历及主要学术工作。

●我于1918年9月26日出生于中国河南省卫辉市(现名)，家道殷实，自幼即受到良好教育。由小学到初中毕业除受正规学校教育外，尚受到严格的家庭私塾教育。这段时间里博览群书，在学校里有“文学天才”之称。初中毕业后，离家到北京考入高中(河北省立第十七高级中学)，正式接触中国文化史课程，对《易经》、《系辞传》中所称“河出图，洛出书，圣人则之”，铭记在心，并奠定了日后要研究河、洛、易的心愿。但时因国家忧患，社会崇尚青年以科学和工程报效国家，遂移读文史之志于科学，在数、理、化三科中，尤喜化学。抗日战争中，考入国立西北工学院冶金系，专攻钢铁冶金。1941年毕业后，工作于四川重庆大渡口钢铁厂。

抗战胜利后，工作于军政部兵工材料研究所，专事金属材料低温性能之研究，并于1947年底到台湾工作。1950年转业于教育工作，创办台湾省立台北工业专科学校冶金系，并应中国工程师学会特约，著有《物理冶金学》与《化学冶金学》两部工程丛书。此后由中正书局出版《二十世纪之冶金科学与工程》及其他论著。1956年底获美国空军研究中心奖学金及台湾省政府出国进修，赴美深造。1957年迄今近四十年居留美国，于1958年冬获伊利诺理工大学硕士，专攻材料科学与工程；再于1963年夏获美国耶鲁大学应用物理与工程博士，研究专题为“镁单晶曲服过程中之超声波耗蚀行为”，其实验技术之难度与理论建立之深度，均属当时尖端课题。实验成功后所摄镁六方晶体之X光照片为美国教科书中的样本。实验程序与结果发表在权威的《应用物理通讯》上。毕业后在各工厂工作5年，于1968年底到美国陆军部材料与力学中心(亦即世界闻名的水城(Watertown)材料研究中心)工作，直到退休，其间发表论文与报告甚多。

到1976年初，研究“河、洛、易图”的宿愿又萌上心头，因为易卦是以人的生命历程为内涵。乃向英国 Sussex College of Technology 申请攻读生物化学，并于1978年获得博士学位，论文题目为 A Two-Way Model of Life Cycle of Man，并由英国剑桥刊出1980～1981年度世界名人传记介绍。其后就创立了美国“河洛易理念书院”，专门研究河洛易之数学、科学与哲学的内涵。

○您刚才谈到创建了美国河洛易理念书院，您能否再大致介绍一下该机构的情况？

●河洛易理念书院(Holoyi Academy For Ideology)设立在美国麻省爱灵敦市新田路55号，它是一个研究、设计、教育与咨询的学术机构，其工作范围包括数学、物理、工程、生物与化学。它不是一所学校，只是一个学人的研究组合。这个书院虽早在1976

年即告建立，但只到 1992 年底才正式以河洛易书院的名称在美国各级政府立案注册。它的院徽或注册服务标志就是我研究创立的用复数标志的太极八卦图案，并取得版权专有。

我建立这个书院的中心目标有三：(一)为对中国古代传统文化的继承、重整与发扬工作开路；(二)为将东方古代精神文明与西方现代物质文明的整合奠基；(三)为促进中国文化成为 21 世纪文化的主流尽力。为达成这三项中心的具体工作任务有三：(一)研究并阐释伏羲时代的《河图》的数学、科学与哲学内涵；(二)研究并阐释夏禹时代的《洛书》的数学、科学与哲学内涵；(三)研究并阐释由伏羲到孔子三千余年间所建立的《易卦》阴阳符号体系的数学、科学与哲学内涵。

○从刚才您的简历和学术成果介绍中，我们知道，您曾在冶金材料、生物化学等领域作了不少优秀的工作，并已取得相当的成就，请问您为何要从材料和生物化学研究转向河洛研究？

●要回答这一问题，真可说是千头万绪，百感交集，这有关我 70 余年生命的心历路程，可以写出一部专书。我只是整个中华民族的一分子，每个人对问题："河洛易的内涵是否值得研究"都可有不同的观点与答案。这里仅从我个人最保守的观点归纳出一个回答："每个历史学家或科学工作者的中心任务就是用最新的文化知识去阐释最古老的文化符号，以维系人类文化的连续性与永恒性，以达成人类文化不停顿的前进。"河图和洛书是中华民族所创立的最古老的两个数学符号系统，在李约瑟的名著《中国古代科技史》中，及每一部世界数学史书内，都载出这两个图型，都阐释洛书为第一个三阶幻方。现代学者亦都承认洛书为一幻方，并由它发展出更复杂的高阶层幻方，但却很少用最新的数学观点去解析河、洛的内涵。这就是我转向河洛研究的原因，并连续在《世界科学》上发表了三篇论文。

○"河洛理论"是您集多年研究的理论结晶，并为之付出了巨

大的心血，为使国内读者更好地了解这一理论的要点，请您再简要阐述一下这一理论。

●我的“河洛理论”简介如下：(一)中华民族原始文化的根或源泉是“河洛文化”，就是发源于黄河邻近洛水地区的文化；(二)河洛文化的基本内涵是数，它的具体表征是《河图》和《洛书》，即如史籍所载：“河出图，洛出书，圣人则之”。(三)河图是代表人类双手的数的符号，它示出两个数学定理：(1)数的衍生是十进位制；(2)数可区分为奇数和偶数。中国古人称河图为纵横图，称序偶(一、六)，(二、七)，(三、八)，(四、九)，(五、十)为纵横数。(四)焦氏“洛书定义”：洛书的数学定义是：“《洛书》是用一到九的自然数作元素所构成的三阶矩阵，”将古代洛书的九宫式与现代数学的矩式等同挂钩，奠定《洛书》是人类文化史上第一个矩阵；(五)焦氏“洛书分类”：按九个数的排列方式及特征，洛书可分为四类：(1)自然洛书；(2)洛书本体；(3)洛书变体；(4)杂体洛书。(六)焦氏“洛书形成”学说：自然界事物的产生是由概率决定的，《洛书》的形成是由九个自然数的排列和组合概率所致。(七)焦氏“洛书目的”学说：《洛书》就是应用由 1 到 9 的自然数所组成的不同矩阵，作为对宇宙空间结构由 0 到 360 度的数学解释。(八)焦氏“洛书转变机构流程”：应用《洛书》的不同矩阵形式，示出空间几何结构由 0 转变到 360 度的机构流程；(九)《洛书》的直接文化产物：中华民族的重要基本哲学体系都源自《洛书》例如(1)天、地、人三才哲学；(2)中庸哲学；(3)易经哲学；(4)自强不息哲学；(5)中国的数学思想和方法等。

○《世界科学》1993 年第 5 期及第 11、12 期独家刊出您的《周易代数学》，这篇大作可说是您近年来学术研究的最新体现，文章刊出后相信会引起不少读者的兴趣。这里是否请您再扼要介绍一下您的《周易代数学》的主要学术观点？

●建立“周易代数学”所根据的学术观点，可扼要概括为如下

两点：

一、建立“周易代数学”的理论基础。本人在研究并综合了下述三大二重性体系后建立了“周易代数学”：(1)宇宙现象的二重性原理：例如天与地的盖载万物，日与月的运行规律，山与川的地质结构，水与火的相互作用？男与女的社会组合，磁体的南北两极，电荷的阴阳两性以及一切基本粒子的质点与波动行为等；(2)数学结构的二重性原理：现代数学中各类数学体系的建立都是符合二重性结构的，例如三角学中的角与边；代数学中的系数与未知数；矩阵数学中的行与列(即纵与横)以及复数域中的实数与虚数。当两者相互对换时，数学定理仍维持不变。(3)周易体系的阴阳二重性：其基本特质为太极本体的阴阳二重性，并与现代最新科学理论如相对论与量子力学等相符。

二、易卦阴阳符号体系与复数系统的相互对应关系：本人根据两者的对应关系，得出了四点结论：(1)易卦阴阳符号系统就是现代数学中的复数代数学；(2)每一易卦代表一个易数，每一易数就是一个复数；(3)阴爻就是实数的单位；(4)阳爻就是虚数的单位。

并由此而推导出作为周易宇宙代数学的基础的若干定义、公理、特质、代数操作及基本函数。

〇最后，请焦先生谈谈您下一步的工作打算。

●自鸦片战争后直到今日，中国现代化问题的主要内涵就是中国传统文化与西方现代文化的相互融合问题，这是一个任重道远和全体人民都须努力以赴的艰苦旅程。焦氏“河洛易数学体系”的建立只是迈开了这千里旅程的第一步。再者，“易学”是跨学科的(interdisciplinary)，它蕴涵着全方位的文化信息，焦氏“周易代数学”的建立只是抛砖引玉，希望国内学者建立更高更广的研究成果。目前中国正进行着全方位的对外开放合作，我下阶段的工作打算就是与国内学术机构合作，建立在中国本土的河洛易理念

学会，以期对中国现代化的工作，有所贡献。

〇谢谢您，焦先生。

从以上的介绍中，相信读者可以概略窥知焦先生何以其七旬之躯，耋耄之年，潜心研究、阐释最古老的文化符号并乐此不疲的心路历程。按理说，焦先生作为一个成绩斐然的科学家即使在美国这样一个竞争十分激烈的国家都是十分杰出的，但在他的晚年，依然以他的全部心血、热量投身于一项纯学术的研究事业中，并将他的研究成果奉献给中国与中华民族。相信读者在阅读了本篇通讯采访录后不仅会对焦先生的工作有所了解，更可以从中认识一位优秀的全方位的海外华人科学家。

[朱明基、江世亮]

附录 3　美国河洛易理念书院简介

河洛易理念书院(Holoyi Academy For Ideology)设立在美国麻省爱灵敦(Arlington)市新田路(Newland Road)55 号，系由美籍华人焦蔚芳博士(Dr. Weily F. Chiao)所建立。它是一个研究、设计、教育与咨询的学术机构；它的工作范围包括数学、物理、工程、生物与化学；它不是一所学校，只是一个学人的研究组合。这个学院虽早在 1976 年即告建立，但只到 1992 年底才正式以河洛易书院的名称在美国注册，它的院徽或注册服务标志就是焦博士研究创立的用复数标志的太极八卦图案，并取得版权专有。

焦博士建立该书院的中心目标有三：(一)为中国古代传统文化的继承、重整与发扬工作开路；(二)为将东方古代精神文明与西方现代物质文明的整合奠基；(三)为促进中国文化成为 21 世纪世界文化的主流尽力。围绕上述目标的具体工作有：(一)研究并阐释伏羲时代的《河图》的数学、科学与哲学内涵；(二)研究并阐释夏禹时代的《洛书》的数学、科学与哲学内涵；(三)研究并阐释由伏羲到孔子三千余年间所建立的《易卦》阴阳符号体系的数学、科学与哲学内涵。

美国河洛易理念书院的成长与发展可分为三个阶段：

一、建立阶段(1976～1982)

焦博士于 1976 年开始建立这个书院，院址位于美国麻省贝满特(Belmont)市，院名即从地名。由 1976 年到 1982 年 6 年间的具体工作任务是收集一切有关河、洛、易的资料，并研究这三类符号体系与现代各种科学体系的可能相互关联。此阶段的主要研究成果为根据河、洛、易系统中的理念，建立了人体的优生系统学说，英国剑桥出版的世界名人传(1980～1981)对此有详细记

载。

二、发展阶段(1983～1990)

1983年初该院迁址到美国麻省爱灵敦市，院名仍从地名。由1983年到1990年间的中心研究工作为河图和洛书的数学内涵。此阶段的研究成果有三：(一)“洛书矩阵学说”的建立，这一学说曾于1986年向上海和北京两地的数学会介绍，并于1987年正式发表于在北京师范大学召集的秦九韶《数书九章》740周年纪念暨学术研讨国际会议上；(二)“洛书数字几何学”的建立，该论文曾于1988年向四川省内江市数学会介绍，并于同年8月间正式发表于美国加州大学圣地亚哥分校召开的第五届国际中国科技史会议上；(三)“河、洛数论”的建立。合并此三篇论文，构成了河洛数学体系。焦博士于1990年8月参加在英国剑桥召开的第六届国际中国科技史会议，将此三篇论文赠存于李约瑟研究所，藉以庆祝李博士90寿诞。同年10月，此三篇论文正式公布于在河南省安阳市召开的国际周易与自然科学研讨会议。

三、成果阶段(1991～)

焦博士根据河、洛数学体系的建立，继续研究《易卦》的数学内涵，乃于1992年间建立了焦氏“周易宇宙代数学”，指出易卦阴阳符号体系与现代数学中的复数数域的对应关系，并创立了易卦的复数式和代数运算及基本函数关系。根据此研究成果，该院名称乃由爱灵敦改称河洛易，并正式向美国各级政府立案注册。该院今后将以河洛易数学体系为基础，研究并发展出河、洛、易体系的各种科学与哲学内涵，以期对人类文化的弘扬有所贡献。

在21世纪即将来临的阶段，河洛易理念书院的中心研究目标是：根据《周易·大衍》原理，建立“太极大衍”学说，作为解析宇宙万象的统一理论。

附录 4　黎凯旋先生致焦博士函

（弟去年九月曾赴洛杉磯「美國易經考古學會」研究，附聞。）

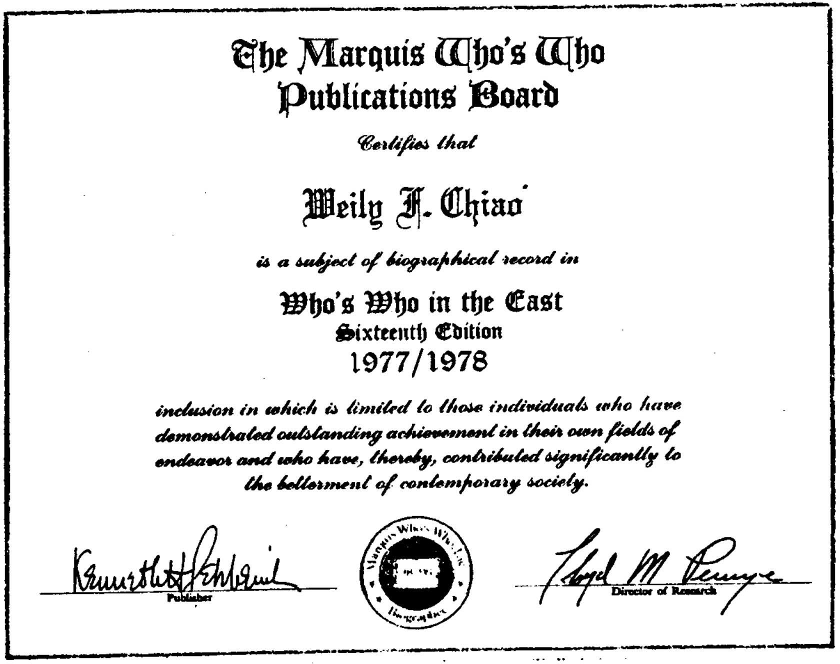
蔚芳博士道席：去年十月來函早已收到，弟因俗務繁冗、致前封來信均一再遲復，歉咎良深。承寄焦氏洛書陣量學說談話一紙，足見吾兄對洛書有精湛之研究，曷勝敬佩。如有著作，請用中文寄本會「中華易學月刊」發表為何？尚此奉復，敬頌

著安

弟黎凱旋上

七十七年四月九日

附录 5　1977～1978 年美国名人传证书



The Marquis Who's Who
Publications Board

Certifies that

Weily F. Chiao

is a subject of biographical record in

Who's Who in the East
Sixteenth Edition
1977/1978

inclusion in which is limited to those individuals who have demonstrated outstanding achievement in their own fields of endeavor and who have, thereby, contributed significantly to the betterment of contemporary society.

Publisher

Director of Research

附录 6　1978～1979 年优秀美国人证书

Notable Americans Award

W E I L Y　F.　C H I A O

HAS BEEN SELECTED TO APPEAR IN THE 1978-79 EDITION
OF NOTABLE AMERICANS
IN RECOGNITION OF PAST ACHIEVEMENTS
AND OUTSTANDING SERVICE TO
COMMUNITY, STATE, AND NATION

1978-79

Janet T. Vickers

EDITORIAL DIRECTRESS

Presented by the Editorial Board of American Biographical Institute
a Division of Historical Preservations of America

附录7 1981年科技名人传证书

Certificate
of
Technical
Recognition
1981

Chairman Selection Committee

Technical Selection Editor

Technology Recognition Corporation

certifies that

Weily F. Chiao

has been chosen by the Selection Committee for inclusion in

WHO'S WHO IN TECHNOLOGY TODAY

by virtue of significant contributions to the disciplines of advanced science and technology

附录 8　1983 年美国陆军部奖状

DEPARTMENT OF THE ARMY

CERTIFICATE OF APPRECIATION

TO

Weily F. Chiao

ON THE OCCASION OF YOUR RETIREMENT, I WISH TO EXTEND TO YOU MY PERSONAL THANKS AND THE APPRECIATION OF THE UNITED STATES ARMY FOR THE MANY YEARS OF SERVICE WHICH YOU HAVE GIVEN TO OUR COUNTRY. I SHARE YOUR PRIDE IN THE CONTRIBUTIONS YOU HAVE MADE TO THE ARMY AND I TRUST THAT YOU WILL MAINTAIN AN ACTIVE INTEREST IN THE ARMY AND ITS OBJECTIVES DURING YOUR RETIREMENT. YOU TAKE WITH YOU MY BEST WISHES AND THOSE OF YOUR FELLOW EMPLOYEES FOR HAPPINESS AND SUCCESS IN THE YEARS THAT LIE AHEAD.

30 September 1983

Lawrence C. Ross

LAWRENCE C. ROSS
Colonel, OD
Deputy Director/Commander

附录9　1993年美国4位共和党总统联名签发的荣誉奖状

Republican Presidential Legion of Merit

Presidential Honor Roll

Patriotism, Commitment, Integrity

Dr. Weily F. Chiao

of the City of Arlington

in the Commonwealth of Massachusetts

inducted into the

Presidential Legion of Merit Honor Roll

in perpetual recognition of

ceaseless dedication and

unselfish generosity in support

of Republican principles and candidates.

George Bush
President 1989-1993

Ronald Reagan
President 1981-1989

Gerald Ford
President 1974-1977

Richard Nixon
President 1969-1974

附录 10　1986 年在上海的讲学聘书

科学會堂

陳毅题

焦蔚芳博士

敬请您于4月22日(星期二)上午九时〇分

在科学会堂作学术讲演

上海市科学技术协会
上海市数学會
一九八六年四月廿日

附录 11　1986 年在北京的讲学聘书

兹聘請

焦蔚芳　博士

作有关中國数学史问题的報告

北京市数学会

北京大学数学系

北京師范大学科学史研究中心

1986.5.12

附录12　1988年焦博士在内江讲学

关于举办“洛书几何学”暨数学教育学术交流会

（第一次通知）

内江师范专科学校、内江教育学院、内江市教育局拟于美籍华裔学者，美国马萨诸塞州爱灵数理念书院院长，兼任中国黄河大学副校长焦蔚芳先生访问内江期间，联合举办“洛书几何学”暨数学教育学术交流会。

焦先生学术造诣很深，曾获冶金博士及生物学博士，且对中国“洛书”的数学内涵有精深的研究，创焦氏“洛书阵量”学说，先后在上海市数学会，北京秦九韶国际学术会议上宣讲，深受我国数学史界的赞赏与敬慕。

会议订于88年5月4－5日召开，5月3日报到；5月4日开幕式，专家学者学术报告；5月5日，学者互访，会下交流。

参加会议者，请提交论文题目，并自备文本50份，到会时交会务组，每位与会者可在会上宣讲30分钟。

光临

内江师专
教育学院
教育局

一九八八年三月十七日

来者请回函以便安排食宿：

姓名	年龄	性别	职别	论文题目	备注

请于4月4日以前回函，（以邮戳为准）函寄内江师专数学系董季贤收。